Logique

Assertions, connecteurs, quantificateurs

Autocorrection A.
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et P, Q et R trois assertions. Écrire la négation des assertions suivantes.

(i) P et non(Q) ;

(ii) $(P \Rightarrow Q)$ et R ;

(iii) $\exists x \in [1, +\infty[: a \geqslant b + x$;

(iv) $a = b = c$.

Autocorrection B.
Écrire une assertion quantifiée traduisant le fait que tout réel positif est le carré d'un nombre réel.

Exercice 1.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Traduire à l'aide de quantificateurs chacune des assertions suivantes. On en donnera également la négation.

(i) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est nulle.

(ii) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

(iii) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante.

(iv) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne prend que des valeurs strictement inférieures à 2.

(v) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne prend que des valeurs strictement inférieures à une certaine constante.

(vi) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

(vii) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

(viii) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'annule au moins une fois.

(ix) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'annule au plus une fois.

Calcul propositionnel, tables de vérité

Exercice 2.
Soit P, Q, R, H_1, H_2 des assertions. Montrer à l'aide de tables de vérité que les assertions suivantes sont toujours vraies (on dit qu'il s'agit de *tautologies*).

(i) $(\text{non}(P) \Rightarrow P) \Leftrightarrow P$;

(ii) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$;

(iii) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$;

(iv) $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$;

(v) $[(H_1 \Rightarrow P) \text{ et } (H_2 \Rightarrow P) \text{ et } (H_1 \text{ ou } H_2)] \Rightarrow P$;

(vi) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow [(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)]$.

Exercice 3.

1. Construire à l'aide des assertions « P », « Q » et des connecteurs logiques « non » et « et » une proposition équivalente à « P ou Q ».
2. Même question pour l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » et pour « $P \Leftrightarrow Q$ ».

Exercice 4 (Barre de Sheffer).

Si P et Q sont deux assertions, on note $P \uparrow Q$ et on appelle *barre de Sheffer de* P *et* Q l'assertion non(P et Q).

À l'aide des assertions P et Q et avec la barre de Sheffer comme unique connecteur logique, construire des assertions équivalentes à

(i) non(P) ;
(ii) P et Q ;
(iii) P ou Q ;
(iv) $P \Rightarrow Q$;
(v) $P \Leftrightarrow Q$.

Logique extra-mathématique

Exercice 5 (Tâche de sélection de Wason).

Quatre cartes ont un nombre imprimé sur une de leurs faces et une lettre de l'autre côté. Elles sont posées sur une table et montrent $\boxed{\mathbf{A}}\,\boxed{\mathbf{B}}\,\boxed{\mathbf{1}}\,\boxed{\mathbf{2}}$. Quelles cartes doit-on retourner pour savoir si les cartes respectent la règle : « *au dos de chaque voyelle se trouve un nombre pair.* » ?

Exercice 6. *Godement*, Cours d'algèbre

À la suite d'une représentation de *Pelléas et Mélisande*, un journaliste hésite entre les deux rédactions suivantes :

(i) Jamais le rôle de Mélisande n'a été si bien chanté.

(ii) Jamais si jeune cantatrice, aux si beaux cheveux, n'a si bien chanté Mélisande.

Lequel de ces compliments est le plus fort ?

Modes de raisonnement

Autocorrection C.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y < x$.

Autocorrection D.

Soit $I = [0, 1]$. Montrer $\exists x \in I : \forall y \in I, x \leqslant y$.

Exercice 7.

Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant).

(i) $1 + 1 = 2 \Rightarrow 1 + 1 = 3$;
(ii) $1 + 1 = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$;
(iii) $1 = 0 \Rightarrow \exists p, q, r \in \mathbb{Z} : p^3 + q^3 + r^3 = 114$;
(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x \geqslant 3$;
(v) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$;
(vi) $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est pair ;
(vii) $\exists x \in \mathbb{R}_+ : x < \sqrt{x}$;
(viii) $\exists! z \in \mathbb{R} : \cos z = 0$;
(ix) $\exists x \in \mathbb{R} : (x \leqslant x^2$ et $x = e^{-x})$;
(x) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : n + m$ est impair ;
(xi) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : n\,m$ est impair ;
(xii) $\exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant \eta \Rightarrow x^2 \leqslant 1$.
(xiii) $\exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant \eta \Rightarrow x^2 \leqslant 1$.
(xiv) $\exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant \eta \Rightarrow x^2 \leqslant 10^{-18}$;
(xv) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant \eta \Rightarrow x^2 \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8. ☑

Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant). On énoncera la négation des assertions fausses.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;

(iii) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;

(iv) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;

(v) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : n + m$ est pair ;

(vi) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, n + m$ est pair ;

(vii) $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R} : y = e^x$;

(viii) $\exists y \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathbb{R}, y = e^x$.

Exercice 9.

Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant). On énoncera la négation des assertions fausses.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \big(\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0\big) \Rightarrow x = 0$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = 0 \Rightarrow x = 0$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}, (n \geqslant 0 \text{ ou } n \leqslant 0)$;

(iv) $(\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0)$ ou $(\forall n \in \mathbb{Z}, n \leqslant 0)$.

Exercice 10. 💡

Voici des extraits de preuves issus de livres mathématiques. Sans chercher à comprendre les démonstration, ni même ce dont il est question, déterminer le type de preuve employé à chaque fois.

(i) (Patrick Dehornoy, *La théorie des ensembles*, Calvage et Mounet, 2017).

> **Proposition (axiome d'infini I).** Si le système $\mathsf{ZFC}_{\mathsf{fini}}$ est consistant, il ne prouve pas l'axiome d'infini.
>
> *Démonstration.* Supposons que le système $\mathsf{ZFC}_{\mathsf{fini}}$ est consistant et prouve l'axiome d'infini. Par le théorème de complétude, $\mathsf{ZFC}_{\mathsf{fini}}$ a alors un modèle $\mathcal{M}$, et, puisque $\mathsf{ZF}_{\mathsf{fini}}$ prouve Inf, le modèle $\mathcal{M}$ est modèle de ZF. Mais alors la structure $(V_\omega, \in)^{\mathcal{M}}$ est un modèle de $\mathsf{ZFC}_{\mathsf{fini}}$ qui ne satisfait pas Inf, ce qui contredit l'hypothèse.

(ii) (Éric Amar et Étienne Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004)

> **Corollaire 4.4.5.** (Ω connexe.) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle, alors f n'a qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de Ω.
>
> *Preuve.* Si f possédait une infinité de zéros sur un compact K de Ω, alors $Z(f)$ aurait un point d'accumulation dans K, donc dans Ω, et f serait identiquement nulle par le principe des zéros isolés.

(iii) (Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*, Princeton University Press, 2009)

> **Corollary 2.3.4.10.** Let $\mathcal{C}$ be an n-category and $p : K \to \mathcal{C}$ be a diagram. Then $\mathcal{C}_{/p}$ is an n-category.
>
> *Proof.* If $n \leqslant 0$, this follows easily from Examples 2.3.4.2. and 2.3.4.3. We may therefore suppose that $n \geqslant 1$. [...]

(iv) (Antonio Machì, *Gruppi*, Springer, 2007)

> **1.31. Teorema.** I sottogruppi di un gruppo ciclico sono ciclici.
>
> *Dim.* Se il gruppo è infinito, è isomorfo a $\mathbb{Z}$, e i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ sono ciclici, come visto nell'*Es.* 1 di 1.21. Se G è finito, la dimostrazione è analoga a quella per $\mathbb{Z}$.[...]

(v) (Martin Brandenburg, *Einführung in die Kategorientheorie*, 2^{e} éd., Springer, 2015).

> **Lemma 4.1.16** (Charakterisierung von Isomorphismen)**.** Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus zwischen Strukturen eines Typs τ. Genau dann ist f ein Isomorphismus, wenn die zugrunde liegende Abbildung $U(f) : U(A) \to U(B)$ von Mengen bijektiv ist.
>
> *Beweis.* Wenn f ein Isomorphismus ist, so ist nach Lemma 3.2.4 auch $U(f)$ ein Isomorphismus, also bijektiv. Sei umgekehrt $U(f)$ [...] bijektiv[...]

Preuve des implications (dont contraposée)

Exercice 11.

La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout nombre pair $\geqslant 4$ est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

1. Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible.
2. En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.
   Que peut-on en déduire sur la conjecture forte ?

Exercice 12.

Montrer l'assertion $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y > 2 \Rightarrow x > 1$ ou $y > 1$.

Énoncer précisément la réciproque de cette assertion, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

Exercice 13$^+$.

Soit $A, B \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, A \leqslant B + \varepsilon) \Rightarrow A \leqslant B$.

Preuve des équivalences (dont analyse-synthèse)

Exercice 14$^+$.

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant A$;

(ii) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : u_n > A$.

Exercice 15.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *strictement croissante* si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Montrer que f est strictement croissante si et seulement si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b).$$

Exercice 16.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.
   (i) $\exists y_0 \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = y_0$;
   (ii) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2)$.
   Quelle propriété de f traduisent-elles ?
2. Montrer que si f est à la fois croissante et décroissante, elle vérifie (i). *Idem* avec (ii).
   (On n'utilisera pas la question précédente).

Exercice 17$^+$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

Montrer que l'assertion $\forall x \in \,]0, 1[\,, ax + b \geqslant 0$ est équivalente à $(b \geqslant 0$ et $a + b \geqslant 0)$.

Exercice 18.

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\, f(x) + y^2 + f(xy) = f(x+y)^2 - f(x)f(y). \qquad (✠)$$

On procède par analyse et synthèse.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (✠).
   (a) En appliquant judicieusement (✠), déterminer $f(0)$.
   (b) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}, f(y)^2 = y^2$.
   Que peut-on en déduire sur f ?
   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
2. Conclure.

Exercice 19.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = f(x) + f(y)$.

Exercice 20$^+$.

Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n$.

Disjonction de cas et preuves des disjonctions

Exercice 21.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que la somme $n + m$ soit impaire et le produit nm soit pair.

Exercice 22.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \geqslant x$. Montrer que $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$.

Exercice 23.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, (x \notin \mathbb{Q}$ ou $\exists n \in \mathbb{N}^* : nx \in \mathbb{Z})$.

Récurrence

Autocorrection E.

En calculant les premières valeurs, conjecturer une formule pour la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ des premiers nombres impairs, puis la démontrer par récurrence.

Autocorrection F.

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 0, u_{n+2} = 5\, u_{n+1} - 6\, u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 24 (Inégalité de Bernoulli).

Montrer $\forall x \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 25 (Équation de Pell-Fermat).

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers naturels a_n et b_n tels que
$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}.$$
2. Que dire de $(3-2\sqrt{2})^n$?
3. En déduire qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

Exercice 26$^+$.

Montrer que tout nombre entier $\geqslant 12$ peut s'écrire sous la forme $4a + 5b$, pour des entiers naturels a et b.

Exercice 27$^+$.

0. Avant de chercher à y répondre, comprendre pourquoi les deux questions suivantes ne sont pas les mêmes. Y a-t-il un lien logique entre les deux ?
1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2$ soit un carré parfait.
2. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1^2 + \cdots + a_n^2$ soit un carré parfait.

Exercice 28.

La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'étant donné n nombres réels $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, ils sont en fait tous égaux.

> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion
>
> « quels que soient $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on a $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$. »
>
> Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ par récurrence.
>
> **Initialisation.** S'il n'y a qu'un nombre u_1, il n'y a rien à montrer, ce qui montre $P(1)$.
> **Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $P(n)$.
> Montrons $P(n+1)$.
> Soit $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}$.
> D'après $P(n)$, on a déjà $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$.
> Par ailleurs, si l'on pose $u_1' = u_2, u_2' = u_3, \dots, u_n' = u_{n+1}$ et que l'on applique $P(n)$ à la famille $(u_1', \dots, u_n')$, on obtient $u_1' = \cdots = u_{n-1}' = u_n'$, c'est-à-dire $u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$.
> Cela entraîne que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$, et montre donc la propriété voulue.

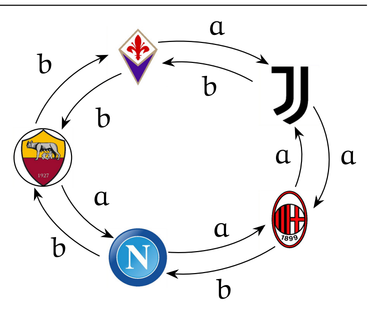
Le résultat est évidemment faux. Où est le problème ?

Exercice 29^{++} (Tous les chemins mènent à Rome).

Le dessin ci-contre montre un circuit de $n = 5$ villes vérifiant deux propriétés :

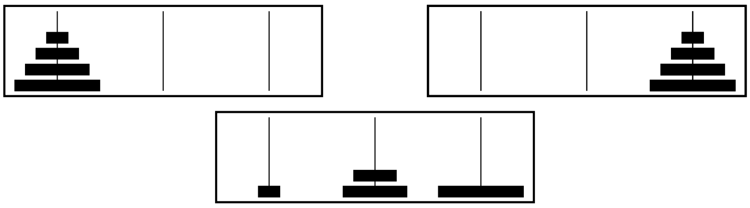
- de chaque ville partent deux routes, étiquetées a et b ;
- il existe une suite d'instructions (ici, *aabb* convient, par exemple) qui amène de n'importe quelle ville du circuit à la ville entourée.

Pour quelles valeurs de $n \geqslant 3$ peut-on construire un tel circuit ?



Exercice 30$^+$.

La *tour de Hanoï* est un jeu à un joueur qui se joue comme suit : on dispose de trois piquets et de n disques percés de tailles différentes. Une position légale du jeu est une disposition des n disques sur les piquets qui soit telle que sur chaque piquet, un disque n'est jamais posé sur un autre disque plus petit. Dans la position de départ, tous les disques sont sur le premier piquet. Le but du jeu est d'arriver à la situation où tous les disques sont sur le troisième piquet, en ne déplaçant qu'un disque à la fois (on n'a évidemment accès qu'au disque le plus haut de chaque piquet) et en ne passant que par des positions légales.



Positions initiale, finale et intermédiaire

1. Montrer que quel que soit n, le jeu de la tour de Hanoï est résoluble.
2. Quel est le nombre minimum de coups nécessaires pour le résoudre ?

Exercice 31$^+$.

On suppose que sur un circuit se trouvent un certain nombre de dépôts d'essence, contenant à eux tous juste assez d'essence pour faire un tour du circuit. Montrer qu'en partant avec un réservoir vide d'un dépôt d'essence bien choisi, il est possible de faire un tour du circuit sans jamais manquer d'essence.

Exercice 32^{++}.

Dans un *tournoi d'ordre* n (au sens mathématique), $n \geqslant 2$ équipes s'affrontent une fois chacune. Chaque match désigne un vainqueur (il n'y a donc pas de match nul).

1. Montrer que quelle que soit l'issue du tournoi, il sera possible de numéroter les équipes $\acute{E}_1, \acute{E}_2, \ldots, \acute{E}_n$ de telle sorte que, pour tout $1 \leqslant i < n$, l'équipe $\acute{E}_i$ ait battu l'équipe $\acute{E}_{i+1}$ *(théorème de Rédei, 1934)*.
2. Un tournoi est dit *équilibré* si chaque équipe a gagné autant de matchs qu'elle en a perdu. Montrer qu'il existe un tournoi équilibré d'ordre n si et seulement si n est impair.

Petits problèmes

Exercice 33.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M.$$

1. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « f n'est pas bornée ».
2. Donner un exemple de fonction bornée et un exemple de fonction qui ne l'est pas. (On le démontrera dans les deux cas).
3. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leqslant M$ obtenue en échangeant les deux quantificateurs ?
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists a, b \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, a \leqslant f(x) \leqslant b$.
5. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \forall x, y \in \mathbb{R}, a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b.$$

Exercice 34.

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-*périodique* si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

1. Montrer que la somme de deux fonctions T-périodiques est T-périodique.
2. Montrer qu'il existe une fonction T-périodique non constante.
3. Montrer que toute fonction T-périodique est également 2T-périodique.
4. Que dire de la réciproque du résultat précédent ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute fonction T-périodique est également nT-périodique.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et croissante.
   (a) Montrer que f est constante sur l'intervalle $[0, T]$, c'est-à-dire que

   $$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in [0, T], f(x) = y.$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est constante sur l'intervalle $[0, nT]$.
   (c) En déduire que f est constante.

Exercice 35$^+$.

Dans cet exercice, on adoptera la définition selon laquelle une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est *croissante* si $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m \Rightarrow u_n \leqslant u_m$.

On dira par ailleurs que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *pseudo-croissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant M, u_m \geqslant u_n.$$

1. Montrer que toute suite croissante est pseudo-croissante.
2. Montrer que la somme de deux suites pseudo-croissantes est pseudo-croissante.
3. Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas pseudo-croissante.
4. En considérant la suite $(n + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la réciproque de la première question est fausse.
5. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *pseudo-décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant M, u_m \leqslant u_n$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pseudo-croissante et pseudo-décroissante.
   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n = u_k$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 36$^+$.

On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence de la façon suivante :

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les nombres de Fibonacci (F_n), pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il y a exactement F_{n+1} façons de paver un échiquier de taille $2 \times n$ avec des dominos.
3. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, \forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}$.
4. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.
5. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + \cdots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2 \qquad \text{et} \qquad F_1 F_2 + F_2 F_3 + \cdots + F_{2n} F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1.$$