Systèmes linéaires et réduction rudimentaire

Exercice 19.

1. On pourra montrer que le système $MX = 0$ n'a que la solution nulle.
2. On pourra utiliser des opérations élémentaires pour se ramener à une matrice à laquelle la première question peut s'appliquer.

Exercice 20.
On essayera d'utiliser le critère nucléaire d'inversibilité.

Exercice 26.
Pour la deuxième question, le cœur du problème est de réussir à exprimer $E_{1,2}$ comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{P}$: voyez-vous pourquoi ?

Exercice 34.
Pour la deuxième question, on pourra commencer par trouver une suite particulière vérifiant la relation.

Autocorrection

Autocorrection A.
Voici les différents ensembles de solutions.

(i) $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$;

(ii) $\left\{\begin{pmatrix}11z-8\\-7z+5\\z\end{pmatrix}\;\middle|\; z\in K\right\}$;

(iii) $\varnothing$;

(iv) $\varnothing$;

(v) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix}\right\}$;

(vi) $\left\{\begin{pmatrix}\frac{4}{5}-\frac{19}{45}t\\ \frac{7}{5}+\frac{t}{15}\\ \frac{1}{5}-\frac{t}{45}\\ t\end{pmatrix}\;\middle|\; t\in K\right\}$;

(vii) $\left\{\begin{pmatrix}-\frac{8}{5}-\frac{1}{5}t-\frac{6}{5}u\\ \frac{17}{5}-\frac{1}{5}t-\frac{1}{5}u\\ -\frac{33}{5}-\frac{11}{5}t-\frac{11}{5}u\\ t\\ u\end{pmatrix}\;\middle|\; (t,u)\in K^2\right\}$;

(viii) $\varnothing$;

(ix) $\left\{\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{7}{3}\end{pmatrix}\right\}$;

(x) $\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}\right\}$;

(xi) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} - z \\ z \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \middle| z \in K \right\}$;

(xii) $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{24}{7} + \frac{6}{7}z + \frac{3}{7}t - \frac{4}{7}u \\ -\frac{13}{7} - \frac{12}{7}z + \frac{1}{7}t + \frac{1}{7}u \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \middle| (z, t, u) \in K^3 \right\}$.

Autocorrection B.

Voici les ensembles de solutions.

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{s+d}{2} \\ \frac{s-d}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) On a l'équation de compatibilité $3 + a + b = 0$. Si elle est vérifiée, l'ensemble des solutions est $\left\{ \begin{pmatrix} b+1 \\ z - 3b - 4 \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in K \right\}$; sinon, il est vide.

(iii) Le système n'est compatible que si $a = 1$ et $b = -1$ ou si $a = -1$ et $b = 1$. Dans ce cas, l'unique solution en est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(iv) Si $m = 1$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{ \begin{pmatrix} 1 - y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (y, z) \in K^2 \right\}$. Si $m = -2$, le système a une unique solution : $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dans tous les autres cas, le système est incompatible.

(v) Si $a = 1$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{ \begin{pmatrix} 1 - y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (y, z) \in K^2 \right\}$. Si $a = -2$, le système est incompatible. Dans tous les autres cas, le système a une unique solution : $\begin{pmatrix} \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$.

(vi) Si $a = -4$, le système est incompatible. Sinon, il admet une unique solution : $\begin{pmatrix} \frac{3a^2 - 2a - 6}{a+4} \\ \frac{-2a^2 + 2a + 5}{a+4} \\ \frac{a-1}{a+4} \end{pmatrix}$.

(vii) Si $a + 2b = 0$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{ \begin{pmatrix} b + 4z - t \\ -3b - 8z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| (z, t) \in K^2 \right\}$. Si ce n'est pas le cas, il est incompatible.

(viii) Si $p = 2q - 2r$, le système a une unique solution, que l'on peut noter $\begin{pmatrix} \frac{s-2q-2r}{9} \\ \frac{4q-5r-2s}{9} \\ \frac{5q-4r+2s}{9} \end{pmatrix}$. Dans le cas contraire, le système est incompatible.

Autocorrection C.

On peut traiter les premiers exemples par l'application vue en cours du pivot de Gauss.

- Non inversible.
- Inversible, d'inverse $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- Inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Non inversible.
- Inversible, d'inverse $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3i & 2i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- Notons M la matrice. Après les premières transvections, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ 0 & 1-|z|^2 & \overline{z}\left(1-|z|^2\right) \\ 0 & z\left(1-|z|^2\right) & 1-|z|^4 \end{pmatrix}.$$

Si $z \in \mathbb{U}$, les deux dernières lignes sont nulles, donc M n'est pas inversible.
Si ce n'est pas le cas, on peut dilater les deux dernières lignes et obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ 0 & 1 & \overline{z} \\ 0 & z & |z|^2+1 \end{pmatrix}.$$

En continuant le calcul avec des bimatrices, on obtient qu'alors M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{|z|^2-1}\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & 0 \\ z & 1+|z|^2 & \overline{z} \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}.$$

- En effectuant successivement les transvections

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n,$$

on arrive à la matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 1 au-dessus de la diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant à nouveau les mêmes transvections

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \ldots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n,$$

on obtient alors I_n.
En refaisant ces opérations sur I_n on obtient successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est donc l'inverse recherché.

► Faisons le calcul avec des bimatrices.

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{$*$}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \end{array}\right) \tag{$\dagger$}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n-2}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \cdots & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \cdots & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \cdots & \frac{n-2}{n-1} & \frac{-1}{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \end{array}\right) \tag{$\ddagger$}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1}
\end{array}\right) \qquad (\maltese)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1}
\end{array}\right) \qquad (\star)$$

Explications :

- $(*)$ transvections successives $L_n \leftarrow L_n + L_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$;
- $(\dagger)$ dilatation $L_n \leftarrow \dfrac{1}{n-1} L_n$;
- $(\ddagger)$ transvections successives $L_i \leftarrow L_i - L_n$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$;
- $(\maltese)$ dilatations successives $L_i \leftarrow -L_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$;
- $(\star)$ transvections successives $L_n \leftarrow L_n - L_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Donc la matrice est inversible, d'inverse

$$\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}
2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 2-n & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1 & 2-n & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 2-n
\end{pmatrix}.$$

Autocorrection D.

(i) Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X - 3$ dont les racines sont (après calcul) -1 et 3. On en déduit qu'on peut trouver deux nombres réels R et S tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = R\,3^n + S\,(-1)^n$.

En identifiant les premiers termes, on obtient le système $\begin{cases} R + S = 1 \\ 3R - S = 1 \end{cases}$, dont l'unique racine est (après calcul) $(R, S) = (1/2, 1/2)$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}.$$

(ii) Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 4$, dont la racine (double) est 2. On en déduit qu'on peut trouver deux nombres réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + Bn)\,2^n$.

En identifiant les premiers termes, on obtient le système $\begin{cases} A & = 1 \\ 2A + 2B = 6 \end{cases}$, dont l'unique racine est (après calcul) $(R, S) = (1, 2)$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2n + 1)2^n.$$

(iii) Il s'agit de la suite nulle (par une récurrence double immédiate, ou par la formulation matricielle).

(iv) Le polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 2$ a pour racines $1 \pm i$, que l'on peut mettre sous forme exponentielle : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. On sait alors qu'on peut trouver deux nombres réels U et V tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}\left(U \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + V \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

En identifiant les premiers termes, on obtient le système $\begin{cases} U & = 2 \\ U + V = 1 \end{cases}$, dont l'unique racine est $(U, V) = (2, -1)$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}^n\left(2 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$