Fonctions réelles

Exercice 1.
On pourra procéder par l'absurde.

Exercice 9.
On pourra calculer les premières puissances de 2. Combien ont un chiffre ? deux ? trois ? etc.

À partir de là, vous pourrez chercher à énoncer une conjecture précise sur le nombre d'entiers n tels que 2^n ait k chiffres, et chercher à la démontrer à l'aide du logarithme décimal.

Exercice 12.
Dans les deux cas, on pourra rédiger par analyse et synthèse, pour plus de souplesse.

(i) Remarquer que $8^x = (2^x)^3$.

(ii) Si (x, y) est solution du système, on obtient facilement un système somme produit liant x et $y' = 2y$.
On ne s'alarmera pas si les solutions sont un peu pénibles.

Exercice 18.
Essayer de faire intervenir la fonction tangente hyperbolique (cela mène à des disjonctions de cas).

Exercice 19.
Comment ferait-on s'il s'agissait de (co)sinus « usuels » et pas hyperboliques ?

Exercice 25.
On pourra essayer de traduire l'énoncé en termes de la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto xe^x. \end{cases}$$

Exercice 26.
Dans les deux cas, on peut avoir envie « d'identifier » et de conclure que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est la seule solution.

Cependant, rien ne justifie *a priori* cette identification. Il faut essayer d'obtenir des renseignements indirects sur a, b et c, par exemple en considérant certaines valeurs particulières de x, voire en introduisant une fonction $f_{a,b,c} : x \mapsto ae^{2x} + be^x + c$ et en étudiant ses limites, sa dérivée, ou d'autres caractéristiques.

Une fois le raisonnement fait, on verra si notre envie d'identification était justifiée.

Exercice 27.
Pour la première question, étudier la fonction.

Exercice 41.

D'une manière ou d'une autre, il faut se ramener au cas d'égalité des (co)sinus.

Exercice 44.

Remarquer qu'on ne demande que la dérivée n-ième (et pas toutes les dérivées). Essayer d'exprimer f_{n+1} en fonction de f_n.

Exercice 45.

On pourra procéder par récurrence, en remarquant que l'expression $\cos^2(f(x)) = \cos^2(\arctan(x))$ se simplifie.

Autocorrection

Autocorrection A.

1. On montre facilement que la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire).
   Traitons par exemple le cas impair.
   Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions impaires. Montrons que $f + g$ est impaire.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
   $$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= -f(x) - g(x) && \text{par imparité de } f \text{ et de } g \\ &= -(f+g)(x),\end{aligned}$$
   ce qui démontre que $f + g$ est impaire.
   En revanche, on ne peut pas déterminer le sens de variation de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donnons deux arguments en ce sens.
   - Considérons la fonction
     $$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + x. \end{cases}$$
     Cette fonction est la somme de $x \mapsto 1$ (paire) et $x \mapsto x$ (impaire). Pourtant, on vérifie aisément qu'elle n'est ni paire, ni impaire, car $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$, qui ne sont ni égaux ni opposés.
   - On a vue que toute fonction se décomposait (en fait, d'une unique manière, même si cela n'importe guère ici) en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Le fait d'être somme de deux telles fonctions n'apporte donc aucune information sur la fonction somme. En particulier, il n'y a rien à dire sur son sens de variation.

   En résumé, on a la « table d'addition » suivante.

+	paire	impaire
paire	paire	?
impaire	?	impaire

2. La parité de deux fonctions détermine la parité de leur produit, selon la « table de multiplication » suivante.

×	paire	impaire
paire	paire	impaire
impaire	impaire	paire

Montrons par exemple que le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
Soit donc $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, paire et impaire, respectivement. Montrons que le produit pi est impair.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(pi)(-x) &= p(-x)\, i(-x)\\ &= p(x) \times (-i(x))\\ &= -p(x)\, i(x)\\ &= -(pi)(x),\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

3. La parité de deux fonctions détermine la parité de leur composition, selon la « table de composition » suivante.

$\circ$	paire	impaire
paire	paire	paire
impaire	paire	impaire

Montrons par exemple que la composée (dans l'un ou l'autre sens) d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.
Soit donc $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, paire et impaire, respectivement.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(p \circ i)(-x) &= p\,(i(-x))\\ &= p\,(-i(x))\\ &= p\,(i(x))\\ &= (p \circ i)(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que $p \circ i$ est paire.
De même, on a

$$\begin{aligned}(i \circ p)(-x) &= i\,(p(-x))\\ &= i\,(p(x))\\ &= (i \circ p)(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que $p \circ i$ est paire.

4. La composée $h \circ f$ est paire, si f est paire. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(h \circ f)\,(-x) &= h\,(f(-x))\\ &= h\,(f(x))\\ &= (h \circ f)(x).\end{aligned}$$

En revanche, il n'y a rien à dire sur une composée $h \circ f$, si f est impaire. Par exemple, si h n'est ni paire, ni impaire et que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (qui est impaire), on a $h \circ f = h$.

5. Que f soit paire ou impaire, il n'y a rien à dire sur la composée $f \circ h$. Par exemple, si $h : x \mapsto 1 + x$, les fonctions $x \mapsto (1+x)^2$ (correspondant à la fonction paire $f : x \mapsto x^2$) et $x \mapsto 1 + x$ (correspondant à la fonction impaire $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$) ne sont ni paires ni impaires.

Autocorrection B.
L'expression a un sens pour $x > 1$ et on a

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\,\ln x\right) = \exp\left(\ln(\ln x)\right) = \ln x.$$

Autocorrection C.

(a) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2a}{x^3}\exp(-a/x^2)$;

(b) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \not\equiv 0 \pmod{\pi}\}$,

$$f'(x) = -\frac{(2ax+b)\sin(ax^2+bx+1)\sin x + \cos(ax^2+bx+1)\cos x}{\sin^2 x} \;;$$

(c) $D = D' =]-\infty, -a[\, \cup\,]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{a+x}\right)\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

(d) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{\cos x\,\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;

(e) $D = D' = \left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$, $f'(x) = \left(\ln(ax+b) + \dfrac{ax}{ax+b}\right)(ax+b)^x$;

(f) $D = \mathbb{R}_+$, $D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$;

(g) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\operatorname{ch} x}$;

(h) $D = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, $D' = \left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } x < 0\,; \end{cases}$

(i) $D =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$, $D' =]-\infty, -2[\, \cup\,]0, +\infty[$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x < -2\,; \end{cases}$

(j) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \not\equiv -\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}\right\}$, $D' = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right\}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{signe}(\cos x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si } \cos x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } \cos x < 0\,; \end{cases}$$

(k) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin x\,\cos^2 x\,(\cos x - 3)}{(1-\cos x)^3}$;

(l) $D = D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\cos\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$;

(m) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \not\equiv 0 \pmod{\pi/2}\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin(2x) - 2(x+1)\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$;

(n) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (8x+20)\cos\left((2x+5)^2\right)$;

(o) $D = \mathbb{R}_-$, $D = \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(1-x)\sqrt{-x}}$;

(p) $D = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $D' = \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x - \dfrac{\pi}{6}}}$;

(q) $D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, $D' = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right[$, $f'(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$;

(r) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \operatorname{ch}(x)\sin(x) + \operatorname{sh}(x)\cos(x)$;

(s) $D = \mathbb{R}_+$, $D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(t) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$;

(u) $D = D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$;

(v) $D = D' =]-1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+x} - \sin x \, \ln(1+x)$;

(w) $D = D' = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2\pi k, \pi + 2\pi k[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$;

(x) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch}(x)^2}$;

(y) $D = [-1, 0[\cup]0, 1]$, $D' =]-1, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x) = -\dfrac{\operatorname{ch}(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}\ \operatorname{sh}(\arcsin x)^2}$;

(z) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\cos x}{(\cos x + 2)^4} + \dfrac{4\sin^2 x}{(\cos x+2)^5}$.

(α) $D = D' = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\arctan x}$;

(β) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (\ln \operatorname{ch} x + x \ \operatorname{th} x)\ (\operatorname{ch} x)^x$;

(γ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2\ \cos(5x+1) - 5x^3 \sin(5x+1)$;

(δ) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{\pi n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, $f'(x) = -2x\dfrac{\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$;

(ε) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$;

(ζ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (3x^2+4x+3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$;

(η) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \exp\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

(θ) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{2x^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2x}\right)} = \dfrac{2e^{1/x}}{x^2\left(e^{1/x}-1\right)^2}$;

(ι) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$, $f'(x) = -2\dfrac{x\ \cos(2x) + (x^2-2)\sin(2x)}{(x^2-2)^2}$;

(κ) $D = D' = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\pi k - \frac{\pi}{4}, \pi k + \frac{\pi}{4}\right[$, $f'(x) = -2\tan(2x)$;

(λ) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $D' = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $f'(x) = \operatorname{signe}(x(x-1)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1\,; \end{cases}$

(μ) $D = [1, +\infty[$, $D' =]1, +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(ν) $D =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$, $D' =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

(ξ) $D = D' =]1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x\ \ln x}$;

(o) $D = D' =]e, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x\ \ln x\ \ln\ln x}$;

(π) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \cos x\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x^2}\ \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\ \sin x$;

(ρ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x\,\sin^2 x + x^2\,\sin x\,\cos x}{\sqrt{1+x^2\sin^2 x}}$;

(σ) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{\cos x}$;

(τ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x\, e^{\cos x}$;

(υ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

(φ) $D = \mathbb{R}$, $D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x < 0\,; \end{cases}$

(χ) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\,\cos x}{\sin^2 x}$;

(ψ) $D = [-1, 0[\cup]0, 1]$, $D' =]-1, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{2x}{\arcsin(x^2)\sqrt{1-x^4}}$;

(ω) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + \sin x > 0\}$, $f'(x) = \dfrac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x}$.

Autocorrection D.

(i) Soit $f : x \mapsto \cos(3x)$. Cette fonction est lisse par composition.
On vérifie directement (par récurrence) que

$$f^{(n)} : x \mapsto \begin{cases} 3^n \cos(3x) & \text{si } x \equiv 0 \pmod 4 \\ -3^n \sin(3x) & \text{si } x \equiv 1 \pmod 4 \\ -3^n \cos(3x) & \text{si } x \equiv 2 \pmod 4 \\ 3^n \sin(3x) & \text{si } x \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

On peut simplifier cette disjonction de cas en écrivant plutôt

$$f^{(n)} : x \mapsto \begin{cases} (-1)^{n/2}\, 3^n \cos(3x) & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{(n+1)/2}\, 3^n \sin(3x) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

(ii) Soit $f : x \mapsto x^5 e^{3x}$. Cette fonction est lisse, car elle est le produit de $\alpha : x \mapsto x^5$ et $\beta : x \mapsto e^{3x}$, toutes deux lisses.
D'après la formule de Leibniz, on a alors, quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(k)} \beta^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} \alpha^{(k)} \beta^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} x^5 \times 3^n e^{3x} + \binom{n}{1} \times 5x^4 \times 3^{n-1} e^{3x} + \binom{n}{2} \times 20x^3 \times 3^{n-2} e^{3x} \\ &\qquad + \binom{n}{3} \times 60x^2 \times 3^{n-3} e^{3x} + \binom{n}{4} \times 120x \times 3^{n-4} e^{3x} + \binom{n}{5} \times 120 \times 3^{n-5} e^{3x} \\ &= \Big(243\, x^5 + 405\, n x^4 + 270\, n(n-1) x^3 + 90 n(n-1)(n-2) x^2 \\ &\qquad + 15 n(n-1)(n-2)(n-3) x + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \Big)\, 3^{n-5}\, e^{3x}. \end{aligned}$$

(iii) Soit $f : x \mapsto e^x \cos x$. Cette fonction est lisse, car elle est le produit de exp et cos, toutes deux lisses.

D'après la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{(k)}(x) \exp^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} (-1)^{k/2} \cos(x) e^x + \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} (-1)^{(k+1)/2} \sin(x) e^x \\
&= \underbrace{\left(\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} (-1)^{k/2} \right)}_{a_n} \cos(x) e^x + \underbrace{\left(\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} (-1)^{(k+1)/2} \right)}_{b_n} \sin(x) e^x.
\end{aligned}$$

On peut alors utiliser le binôme de Newton. Notamment car i^k est imaginaire pur dès que k est impair, on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} (-1)^{k/2} \\
&= \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \text{Ré}(i^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{Ré}(i^k) \\
&= \text{Ré} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \right) \\
&= \text{Ré} \left((1+i)^n \right) \\
&= \text{Ré} \left(\sqrt{2}^n e^{in\pi/4} \right) \\
&= 2^{n/2} \cos \left(n \frac{\pi}{4} \right).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
b_n &= - \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \text{Im}(i^k) \\
&= - \text{Im} \left((1+i)^n \right) \\
&= -2^{n/2} \sin \left(n \frac{\pi}{4} \right).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$f^{(n)} : x \mapsto 2^{n/2} \left(\cos \left(n\frac{\pi}{4} \right) \cos x - \sin \left(n\frac{\pi}{4} \right) \sin x \right) e^x = 2^{n/2} \cos \left(x + n\frac{\pi}{4} \right) e^x.$$

Il est peut-être plus simple d'accepter dès le début l'aspect « complexe » de ce calcul et de commencer par calculer la dérivée n-ième de la fonction à valeurs complexes

$$\varphi : x \mapsto e^{(1+i)x},$$

dont f est la partie réelle.
On obtient alors directement

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)} : x \mapsto (1+i)^n e^{(1+i)x} &= \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}} e^{(1+i)x} \\ &= 2^{n/2} e^{x+i\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)},\end{aligned}$$

donc

$$f^{(n)} = \text{Ré}\, \varphi^{(n)} : x \mapsto 2^{n/2} \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) e^x.$$

(iv) Pour éviter tout problème en 0, on pose

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x). \end{cases}$$

Cette fonction est lisse par opérations et on vérifie facilement par récurrence que

$$f^{(n)} : x \mapsto \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Notons que cette fonction est nulle si $\alpha \in [\![0, n-1]\!]$, ce qui n'est pas très surprenant.
Si α est un entier $\geqslant n$, on peut réécrire cette expression sous la forme

$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!} x^{\alpha-n}.$$

(v) Soit $f : x \mapsto x^2 \sin x$. Cette fonction est lisse, car elle est le produit de $x \mapsto x^2$ et sin, toutes deux lisses.
D'après la formule de Leibniz, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} x^2 \sin^{(n)}(x) + \binom{n}{1} \times 2x \times \sin^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} \times 2 \times \sin^{(n-2)}(x) \\ &= \left(x^2 - n(n-1)\right) \sin^{(n)}(x) + 2n\,x \sin^{(n-1)}(x) \\ &= \begin{cases} (-1)^{n/2} \left[\left(x^2 - n(n-1)\right) \sin(x) - 2n\,x \cos(x)\right] & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{(n-1)/2} \left[\left(x^2 - n(n-1)\right) \cos(x) + 2n\,x \sin(x)\right] & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

(vi) Notons $f : x \mapsto \cos^3(x)$.
On commence par linéariser. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x). \end{aligned}$$

Ainsi (voir la première question),

$$f^{(n)} : x \mapsto \begin{cases} (-1)^{n/2} \left(\dfrac{3^n}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)\right) & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{(n+1)/2} \left(\dfrac{3^n}{4}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x)\right) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

(vii) Notons

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}. \end{cases}$$

Le plus simple est d'effectuer une décomposition en éléments simples.
Quel que soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right). \end{aligned}$$

On vérifie alors facilement par récurrence que la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{x+c} = (x+c)^{-1}$ est (quel que soit $c \in \mathbb{R}$)

$$x \mapsto (-1)^n\, n!\, (x+c)^{-n-1} = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+c)^{n+1}}.$$

On en déduit, par linéarité, que

$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n\, n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$

(viii) Notons $g_n : x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$. Cette fonction est lisse sur le domaine D_n où elle est définie ($D_n =]-1,+\infty[$ si $n \geqslant 1$ et $D_0 =]-1,0[\cup]0,+\infty[$).
On peut calculer les premières dérivées demandées.

- $n = 0$.

$$g_0 : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

- $n = 1$.

$$\begin{aligned} g_1 &: x \mapsto \ln(1+x). \\ g_1' &: x \mapsto \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

- $n = 2$.

$$\begin{aligned} g_2 &: x \mapsto x\ln(1+x). \\ g_2' &: x \mapsto \frac{x}{1+x} + \ln(1+x) = 1 - \frac{1}{1+x} + \ln(1+x). \\ g_2'' &: x \mapsto \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

- $n = 3$.

$$\begin{aligned} g_3 &: x \mapsto x^2\ln(1+x). \\ g_3' &: x \mapsto 2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}. \\ g_3'' &: x \mapsto 2\ln(1+x) + 2\frac{x}{1+x} + \underbrace{\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}}_{=\frac{1-(1+x)^2}{(1+x)^2}} \\ &= 2\ln(1+x) + 2\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + 1 - \frac{1}{(1+x)^2}. \\ g_3''' &: x \mapsto \frac{2}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

Enhardis par ces calculs (mais pas assez pour conjecturer la bonne valeur pour la constante multiplicative), on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion

$$\exists C_n \in \mathbb{R} : g_n^{(n)} : x \mapsto C_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}.$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. L'assertion $P(1)$ est démontrée par nos calculs, avec $C_1 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$.

On peut donc trouver $C_n \in \mathbb{R}$ tel que $g_n^{(n)} : x \mapsto C_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}$.

On écrit alors g_{n+1} comme le produit de g_n et de $x \mapsto x$, ce qui permet d'utiliser la formule de Leibniz : pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$g_{n+1}^{(n+1)}(x) = \binom{n+1}{0} x g_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} g_n^{(n)}(x).$$

D'après $P(n)$, on connaît l'expression de $g_n^{(n)}$, et on peut la dériver une fois de plus pour obtenir que

$$g_n^{(n+1)}(x) : x \mapsto C_n \sum_{k=1}^{n} \frac{-k}{(1+x)^{k+1}}.$$

On en déduit, pour $x \in]-1, +\infty[$,

$$g_{n+1}^{(n+1)}(x) = C_n x \sum_{k=1}^{n} \frac{-k}{(1+x)^{k+1}} + C_n(n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}.$$

Le calcul peut se poursuivre en utilisant notamment que pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x}{(1+x)^{k+1}} = \frac{1+x}{(1+x)^{k+1}} - \frac{1}{(1+x)^{k+1}} = \frac{1}{(1+x)^k} - \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$$

On en déduit, pour $x \in]-1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
g_{n+1}^{(n+1)}(x) &= C_n \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} - \frac{1}{(1+x)^k} \right) + C_n(n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k} \\
&= C_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{(1+x)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(1+x)^{k+1}} \right) \\
&= C_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{(1+x)^k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{(1+x)^k} \right) \\
&= C_n \left(\frac{n}{1+x} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(n+1-k)+(k-1)}{(1+x)^k} + \frac{n}{(1+x)^{n+1}} \right) \\
&= n\, C_n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(1+x)^k},
\end{aligned}$$

ce qui montre $P(n+1)$, en posant $C_{n+1} = n\, C_n$.

Cela démontre l'expression voulue, et la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se détermine facilement à partir des informations $C_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_{n+1} = n\,C_n$ obtenues au cours de la démonstration : on a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = ((n-1)!)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On en déduit que

$$\forall x \in D_n, g_n^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } n = 0 \\ (n-1)! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(1+x)^k} & \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$