Suites

Exercice 13.
Pour la deuxième question, on procèdera par l'absurde et on essayera de trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse facilement écrire e, u_n et v_n comme trois fractions avec le même dénominateur.

Exercice 15.
Pour la première question, étudier les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18.
Pour la deuxième question, on pourra démontrer et utiliser que

$$\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1,$$

ce qui entraîne

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 19.
S'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro.

Exercice 22.
On pourra introduire la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\max(u_n, u_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 25.
Dans la première question, on pourra penser à faire la division euclidienne de m par n.

Exercice 31.
On pourra commencer par montrer que si $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$, alors il existe une extractrice θ telle que $\left(q_{\theta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite constante (pour cela, on pourra commencer par construire – par récurrence – une sous-suite bornée).

Exercice 36.
On pourra montrer que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite est borné et stable sous une certaine application affine.

Exercice 44.
Exprimer z_n sous forme algébrique.

Exercice 46.
Pour la première question, on pourra utiliser les formules d'addition pour exprimer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de deux termes successifs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et réciproquement.

Exercice 47.

On pourra développer le produit pour les petites valeurs de n, afin de démontrer par récurrence que le terme général de la suite admet une autre forme, plus facilement exploitable.

Exercice 57.

Dans la deuxième question, on pourra calculer la fonction $f_{n+1} - f_n$.

Dans la troisième, on pourra commencer par montrer l'existence de $\ell \in \mathbb{R}_+$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Autocorrection

Autocorrection A.

Voilà les solutions.

Pour les huit premières questions, on est dans le cadre des théorèmes du cours sur les suites vérifiant des relations de récurrence simple. Pour les quatre dernières, le plus facile est de calculer les premières valeurs, en déduire une conjecture, puis démontrer cette dernière par récurrence (mais ce n'est pas la seule possibilité).

(i) $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = -\dfrac{7}{2}(-2)^k$ (suite géométrique) ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{6}{2^n}$ (suite géométrique) ;

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}, u_p = 10 + 3p$ (suite arithmétique) ;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, 6 - \dfrac{5}{3^n}$ (suite arithmético-géométrique) ;

(v) $\forall i \in \mathbb{N}, u_i = \dfrac{1}{3 \cdot 4^i} - \dfrac{1}{3}$ (suite arithmético-géométrique) ;

(vi) $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 2 - k$ (récurrence linéaire d'ordre 2) ;

(vii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\dfrac{1}{3}(-1)^n + \dfrac{4}{3 \cdot 2^n}$ (récurrence linéaire d'ordre 2) ;

(viii) $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2\sqrt{13}}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2\sqrt{13}}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$ (récurrence linéaire d'ordre 2) ;

(ix) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ -2 & \text{si } n > 0 \end{cases}$;

(x) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(xi) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}$;

(xii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{2^n - 1}$.

Autocorrection B.

(i) La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\frac{\cos n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\frac{n+(-1)^n}{n^2+1} &= \frac{n}{n^2}\frac{1+(-1)^n/n}{1+1/n^2}\\ &= \frac{1}{n}\frac{1+(-1)^n/n}{1+1/n^2}.\end{aligned}$$

On a $(-1)^n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0). On en déduit que $1+(-1)^n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Comme $1+1/n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on en déduit $\dfrac{1+(-1)^n/n}{1+1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, puis, comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(iii) Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\frac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2} \geqslant \frac{n-1}{3},$$

cette dernière quantité étant le terme général d'une suite tendant vers $+\infty$, on a, par minoration,

$$\frac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{e^n+n^2}{n^4+1} = \frac{e^n}{n^4}\frac{1+n^2/e^n}{1+1/n^4}.$$

Par croissance comparée, on a $n^2/e^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme par ailleurs $1+1/n^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a $\dfrac{1+n^2/e^n}{1+1/n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Toujours par croissance comparée, on a $\dfrac{e^n}{n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc

$$\frac{e^n+n^2}{n^4+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(v) Soit $n \geqslant 3$. On a $\dfrac{\ln n+1}{n+4} = \dfrac{\ln n}{n}\dfrac{1+1/\ln n}{1+4/n}$. Comme le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction tendent vers 1, on a $\dfrac{1+1/\ln n}{1+4/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Par ailleurs, par croissance comparée, $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\frac{\ln n+1}{n+4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(vi) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{3^n + (-2)^n}{3^n - (-2)^n} &= \frac{3^n}{3^n}\frac{1 + (-2/3)^n}{1 - (-2/3)^n}\\ &= \frac{1 + (-2/3)^n}{1 - (-2/3)^n}.\end{aligned}$$

On a $1 \pm \left(-\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc

$$\frac{3^n + (-2)^n}{3^n - (-2)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

(vii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n}\left[\sqrt{1+1/n} - \sqrt{1-1/n}\right]\\ &= \sqrt{n}\frac{\left(\sqrt{1+1/n} - \sqrt{1-1/n}\right)\left(\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}\right)}{\left(\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}\right)}\\ &= \sqrt{n}\frac{(1+1/n) - (1-1/n)}{\left(\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}\right)}\\ &= \sqrt{n}\frac{2/n}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}}.\end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction tendent tous deux vers 2, donc ladite fraction tend vers 1. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(viii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} &= \sqrt{n^2}\left[\sqrt{1+1/n} - \sqrt{1-1/n}\right]\\ &= n\frac{2/n}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}} && \text{(calcul précédent)}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}}\end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur de la fraction tendent tous deux vers 2, donc

$$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

(ix) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit, par minoration, que

$$\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(x) Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{n^n} &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n}{n \times n \times n \times \cdots \times n \times n} \\
&= \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{n}}_{\leqslant 1} \times \underbrace{\frac{3}{n}}_{\leqslant 1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leqslant 1} \times \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \\
&\leqslant \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Par majoration, on a donc

$$\frac{n!}{n^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Autocorrection C.

1. On va montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente. Ajouté aux résultat du cours selon lequel la somme de deux suites convergentes est convergente, cela permet de remplir la « table d'addition » suivante.

$+$	convergente	divergente
convergente	convergente	divergente
divergente	divergente	?

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergente et divergente, respectivement. Montrons que $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Supposons au contraire, par l'absurde, que $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
L'écriture $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}} - (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ exprime alors $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme différence de deux suites convergentes, ce qui montre qu'elle converge, et constitue une contradiction.
En revanche, le « ? » ne peut pas être rendu plus précis : il peut arriver que la somme de deux suites divergentes diverge (comme par exemple $(2n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} + (n)_{n\in\mathbb{N}}$) mais aussi qu'elle converge (comme par exemple $(0)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} + (-n)_{n\in\mathbb{N}}$).

2. Pour le produit, le cours affirme que le produit de deux suites convergentes converge, ce qui donne la « table de multiplication » suivante.

$\times$	convergente	divergente
convergente	convergente	?
divergente	?	?

On ne peut rien dire de plus : le produit d'une suite convergente et d'une suite divergente peut aussi bien converger (par exemple $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \times (n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) que diverger (par exemple $(n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \times \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$) et, de la même façon, le produit de deux suites divergentes peut converger (par exemple $(1)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \times \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$) ou diverger (par exemple $(n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} \times (n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Autocorrection D.

Il est possible de faire des démonstrations proches de celles des théorèmes « d'opérations » du cours, et c'est d'ailleurs un bon entraînement, mais on peut directement utiliser ces théorèmes.

En effet, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, alors

$$\min(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n - |u_n - v_n|}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell_1 + \ell_2 - |\ell_1 - \ell_2|}{2} = \min(\ell_1, \ell_2)$$

$$\text{et} \qquad \max(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n + |u_n - v_n|}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell_1 + \ell_2 + |\ell_1 - \ell_2|}{2} = \max(\ell_1, \ell_2),$$

par opérations.

Autocorrection E.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique non constante. Soit $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non constante, on peut trouver deux indices n_0 et n_1 tels que $u_{n_0} \neq u_{n_1}$.

Par une récurrence immédiate, on montre alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(u_{n_0+kT} = u_{n_0} \text{ et } u_{n_1+kT} = u_{n_1}\right).$$

On définit alors les deux applications

$$\varphi_0 : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ k \mapsto n_0 + kT \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ k \mapsto n_1 + kT, \end{cases}$$

qui sont clairement des extractrices. D'après ce qui précède, les sous-suites $\left(u_{\varphi_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{\varphi_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux constantes, mais prennent des valeurs différentes.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet alors deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite. Comme dans le cas de $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ traité en cours, cela implique qu'elle diverge.

Autocorrection F.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-u_n} \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, on sait donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend soit vers une limite finie, soit vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On peut trouver $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Par continuité de $x \mapsto x + e^{-x}$, la limite ℓ doit vérifier $\ell = \ell + e^{-\ell}$, ce qui entraîne $e^{-\ell} = 0$, la contradiction souhaitée.

On a donc montré $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

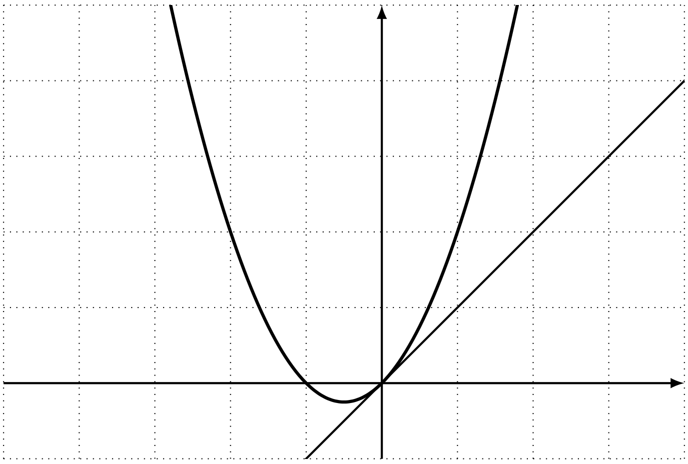
Autocorrection G.

On commence par étudier les fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto x + x^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$$

Notamment, on observe que g s'annule en 0 mais qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
f'		$-$			0			$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
g		$+$					0	$+$	



On observe que le segment $I = \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$ est stable sous f, car $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} \geqslant -\dfrac{1}{2}$, qu'il contient u_0 et que la fonction f y est croissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans I et monotone. Comme $u_1 = -\dfrac{1}{4} \geqslant -\dfrac{1}{2} = u_0$, elle est même croissante. Comme elle est à valeurs dans le segment I, elle est bornée.

Le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge : on peut ainsi trouver $\ell \in I$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Par continuité de f, cette limite doit vérifier $f(\ell) = \ell$. On a donc $\ell = 0$, car c'est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire l'unique zéro de g).

In fine, on a montré $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.