Limites, continuité

Limites de fonctions

Calculs et opérations

Autocorrection A. ☑

Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes.

(i) $\dfrac{x\sin(x^2)}{1+x^2}$ en $+\infty$;

(ii) $\cos(x^2)$ en $+\infty$;

(iii) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ en $+\infty$;

(iv) $(\ln x+\cos x)^2$ en $+\infty$;

(v) $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en $+\infty$;

(vi) $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0 ;

(vii) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$;

(viii) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 ;

(ix) $\dfrac{x^2+\sin x}{1+x^2}$ en $+\infty$;

(x) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$;

(xi) $\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$;

(xii) $\dfrac{\cos(e^x)+2\sin(2e^{-x})+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ en $-\infty$;

(xiii) $\dfrac{\sqrt{|x^3-3x+2|}}{2x^2-x-1}$ en 1 ;

(xiv) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$;

(xv) $\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ en $+\infty$;

(xvi) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$ en 1 ;

(xvii) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1 ;

(xviii) $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$;

(xix) $\ln x\ln(\ln x)$ en 1 ;

(xx) $\dfrac{1-x}{\arccos x}$ en 1.

Exercice 1.

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes.

(i) $x\mapsto\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$; (ii) $x\mapsto x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$; (iii) $x\mapsto x^2\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

Exercice 2.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. Montrer que $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\ell$ si et seulement si $f(\sin x)\xrightarrow[x\to 0]{}\ell$.

Théorème de la limite monotone

Exercice 3.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Montrer que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose qu'il existe une suite $(\xi_n)_n$ telle que $\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $f(\xi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Donner un contre-exemple à cette propriété si f n'est plus supposée croissante.

Exercice 5⁺.

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

Montrer que l'application $x \mapsto \lim\limits_{\substack{t\to x \\ t>x}} f(t)$ est bien définie et croissante.

Exercice 6⁺ (Discontinuités d'une fonction monotone).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. On note D l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}$ tels que f n'est pas continue en a. Montrer qu'il existe une injection $D \to \mathbb{Q}$.

Mélange

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

Montrer que f possède une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f\left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor^{-1}\right) \xrightarrow[x\to0]{} 0$. A-t-on forcément $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$?

Exercice 9⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $f(x) + \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to0]{} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 1$.

Exercice 10⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x)\, f(2x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$.

1. On suppose que f admet une limite en 0. Montrer que cette limite est nulle.
2. Montrer qu'il est possible que f n'admette pas de limite en 0.

Exercice 11⁺.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Continuité

Propriétés locales

Autocorrection B.

Déterminer le domaine de définition, étudier la continuité et les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes.

(i) $x \mapsto e^{-1/x^2}$;

(ii) $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$;

(iii) $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$;

(iv) $x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{|x-1|}$;

(v) $x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$;

(vi) $x \mapsto \cos(x)\cos(1/x)$.

Exercice 12.

Étudier la continuité de $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 13.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est croissante et que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante, f est continue.

Exercice 14.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x+k) = f(x)\} = T\mathbb{Z}$.

Un peu de topologie

Exercice 15.

Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $f_{|D}$ soit croissante. Montrer que f est croissante.

Le résultat reste-t-il vrai en remplaçant « croissante » par « strictement croissante » ?

Exercice 16$^+$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f[A]}$.
2. **Application.** En admettant que $\pi \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 17$^+$.

- Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite *ouverte* si $\forall x \in U, \exists \delta > 0 : [x-\delta, x+\delta] \subseteq U$.
- Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite *fermée* si $\overline{F} = F$.

1. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts et s'ils sont fermés.

   (i) $\varnothing$; (ii) $\mathbb{R}$; (iii) $[0, 1]$; (iv) $]0, 1[$; (v) $[0, 1[$; (vi) $\mathbb{R}_+$; (vii) $\mathbb{Q}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.
   - Montrer que si $F \subseteq \mathbb{R}$ est fermée, alors $f^{-1}[F]$ est fermée.
   - Montrer que si $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouverte, alors $f^{-1}[U]$ est ouverte.
3. Soit $X \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que X est fermée si et seulement si $\mathbb{R} \setminus X$ est ouverte.

Exercice 18^{++}.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $V = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $V = \varphi[\mathbb{Q}]$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Autocorrection C.
Montrer que l'équation $e^x = \pi^2 \ln(x^2+1)$ possède au moins trois solutions réelles.

Exercice 19.
Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que $t \mapsto P(t)$ est une application surjective.

Exercice 20.
Soit I un intervalle. Montrer que toute fonction continue $f : I \to \mathbb{Z}$ est constante.

Exercice 21.
Soit I un intervalle et $f, g \in C^0(I)$ telles que pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \neq 0$ et $f(x)^2 = g(x)^2$.

1. Montrer que l'on a $f = g$ ou $f = -g$.
2. Montrer que ce résultat est faux dans chacun des cas suivants :
   (a) f n'est pas continue ;
   (b) f s'annule sur I ;
   (c) I n'est pas un intervalle.

Exercice 22.
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

Montrer que f n'est pas continue, mais qu'elle vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 23.
Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ alors f possède un point fixe.
2. Montrer que si $[a, b] \subseteq f([a, b])$ alors f possède un point fixe.

Exercice 24.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 25.
Soit I un intervalle et $f \in C^0(I)$ telle que $f(I) \subseteq I$. Montrer que si $f \circ f$ possède un point fixe alors il en est de même pour f. Est-ce encore le cas si l'on ne suppose plus f continue ?

Exercice 26.
Soit $\ell < 1$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 27 (Théorème de Borsuk-Ulam en dimension 1).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 28$^+$.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ telle que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
2. Montrer que si $\delta \in]0,1[$ n'est pas l'inverse d'un entier, il est possible que l'équation $f(x+\delta) = f(x)$ n'ait pas de solution.

Exercice 29. ☑
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell$.

Montrer que f ne peut pas être injective.

Exercice 30. ☑
Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Théorème des bornes atteintes

Exercice 31. ☑
Soit $f, g \in C^0([a,b])$ telles que $\forall x \in [a,b], f(x) < g(x)$. Montrer que

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in [a,b], f(x) + \varepsilon \leqslant g(x).$$

Exercice 32. ☑
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 33.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f([x, x + T/2]) = f[\mathbb{R}]$.

Exercice 34.
Montrer qu'une fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ périodique est bornée.

Exercice 35.
Soit $f \in C^0([0,1])$. Quelle est la nature de la suite $\left(\max\limits_{k \in [\![0,n]\!]} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice 36$^+$. ☑
Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 37.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Montrer que f est bornée.

Exercice 38. ☑

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction

$$M : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sup_{t\in[0,x]} f(t). \end{cases}$$

est bien définie, croissante et continue.

Exercice 39$^+$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si tout réel possède au plus deux antécédents par f, alors il existe un réel possédant exactement un antécédent.

Exercice 40$^+$. *Ulm*

Une fonction $f : \mathbb{Q} \cap [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue est-elle nécessairement bornée ?

Uniforme continuité

Exercice 41.

Montrer que la fonction $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.

Exercice 42.

Donner un exemple de fonction bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non uniformément continue.

Exercice 43.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 44$^+$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leqslant ax+b$.

Fonctions coïncidant en un point

Exercice 45.

Soit $I = [a, b]$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f[I] \subseteq g[I]$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 46. ☑

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\sup_{[a,b]}(f) = \sup_{[a,b]}(g)$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 47$^+$.

Soit $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Équations fonctionnelles

Exercice 48 (Équation fonctionnelle de Cauchy).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda x$.

Exercice 49.
Déterminer les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R})$ telles que $f^2 = f$.

Exercice 50.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 51$^+$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 52$^+$.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$. Déterminer f.

Exercice 53^{+++}.
Trouver toutes les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = f(x) + x$.

Mélange

Exercice 54.
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$ continue telle que, pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ soit croissante.

Montrer que f est croissante.

Le résultat reste-t-il valable si l'on ne suppose plus f continue ?

Exercice 55.

1. Trouver trois intervalles I_0, I_1 et I_2 tels que tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ soit homéomorphe à exactement l'un de ces trois exemples.
2. À quelle condition existe-t-il une application surjective $I_k \to I_\ell$?

Exercice 56.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue surjective. Montrer que f prend toute valeur une infinité de fois.

Exercice 57$^+$.
Montrer qu'il n'existe pas de fonctions continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f[\mathbb{Q}] \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \subseteq \mathbb{Q}$.

Exercice 58$^+$.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$x_{n+1} - x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \cos x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 59^{+}.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall y \in [x, x+\delta], f(x) \leqslant f(y)$. Montrer que f est croissante.

L'hypothèse de continuité est-elle nécessaire ?

Exercice 60 (Fonction de Thomae). ☑

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui associe 0 à tout irrationnel et $1/q$ au rationnel p/q écrit sous forme irréductible. Quels sont les points où f est continue ?

Exercice 61^{+}.

1. Trouver une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en aucun point.
2. Trouver une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en exactement un point.
3. Trouver une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue exactement sur les entiers.

Exercice 62^{+}.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 63^{++}.

1. Trouver $f \in C^0(\mathbb{R})$ non bornée telle que $f \circ f$ soit bornée.
2. Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R})$ est telle que $f \circ f \circ f$ est bornée, alors $f \circ f$ est bornée.