Dérivation

Exercice 5.
Essayer de représenter graphiquement g pour comprendre l'enjeu.

Exercice 13.
On peut procéder par analyse et synthèse. Dans la phase d'analyse, on peut fixer une des variables, par exemple y. On obtient ainsi une égalité entre deux fonctions d'une variable, que l'on peut dériver.

Exercice 17.
On ne peut pas dériver une fonction dont le domaine est $\mathbb{N}^*$. Il faut donc se ramener à une fonction définie sur un intervalle pour utiliser les outils du cours.

Exercice 20.
On pourra faire un dessin, puis chercher une fonction dont les points critiques sont pertinents dans le problème.

Exercice 21.

1. On pourra s'inspirer de la démonstration du théorème de Rolle.
2. On pourra s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.

Exercice 30.
Penser au théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 45.
Ce n'est pas la seule façon de faire, mais une démonstration très rapide peut être obtenue en appliquant le théorème de Rolle à une fonction très judicieuse.

Exercice 50.
Pour la dernière question, on pourra chercher à se ramener à une situation où f' est uniformément continue.

Exercice 51.
On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis et constater que le nombre $P\left(\frac{a}{b}\right)$ est un rationnel sur lequel on possède des informations.

Exercice 54.
On pourra entre autres calculer $Q - Q'$.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) **Faux.** Si l'on prend $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a = 0$, on a, pour tout $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{h^2}{h} \\ &= h \\ \text{mais}\quad f'(a) &= 2 \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc on a $\forall h \in \mathbb{R}^*, \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \neq f'(a)$, ce qui montre que l'assertion proposée est fausse.

(ii) **Faux.** Prenons $f : x \mapsto |x|$ et $a = 0$. On sait que f n'est pas dérivable en 0 (elle est à la fois dérivable à gauche et à droite mais $f'_g(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$), alors que, quel que soit $x \neq a$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| &= \left|\frac{|x|}{x}\right| \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc il n'est pas vrai que la valeur absolue $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|$ tende vers $+\infty$ en 0.

(iii) **Faux.** Prenons $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$ et $f : x \mapsto |x|$. On sait que f n'est pas dérivable en 0 (donc pas dérivable sur $[-1, 1]$). En revanche, les deux restrictions $f_{|[-1,0]}$ et $f_{|[0,1]}$ sont affines (la première est $x \mapsto -x$, la seconde $x \mapsto x$), donc dérivables.

(iv) **Faux.** La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

est dérivable et de dérivée nulle (car elle coïncide, au voisinage de tout $a < 0$ avec la fonction constante -1 et au voisinage de tout $a > 0$ avec la fonction constante 1). Pourtant, cette application n'est pas constante.

(v) **Vrai.** La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est un exemple.

(vi) **Faux.** L'idée est de prendre une fonction qui oscille violemment, où la rapidité des oscillations va faire « exploser » la dérivée.

Par exemple, considérons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin(x^3). \end{cases}$$

On a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ grâce au théorème des gendarmes et à l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$.

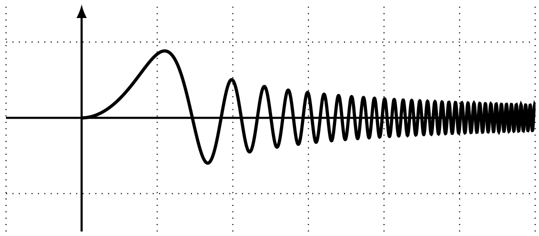
En revanche, f, qui est dérivable par opérations, vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\sin(x^3) + \frac{1}{x}\,3x^2\,\cos(x^3) \\ &= 3x\cos(x^3) - \frac{1}{x^2}\sin(x^3). \end{aligned}$$

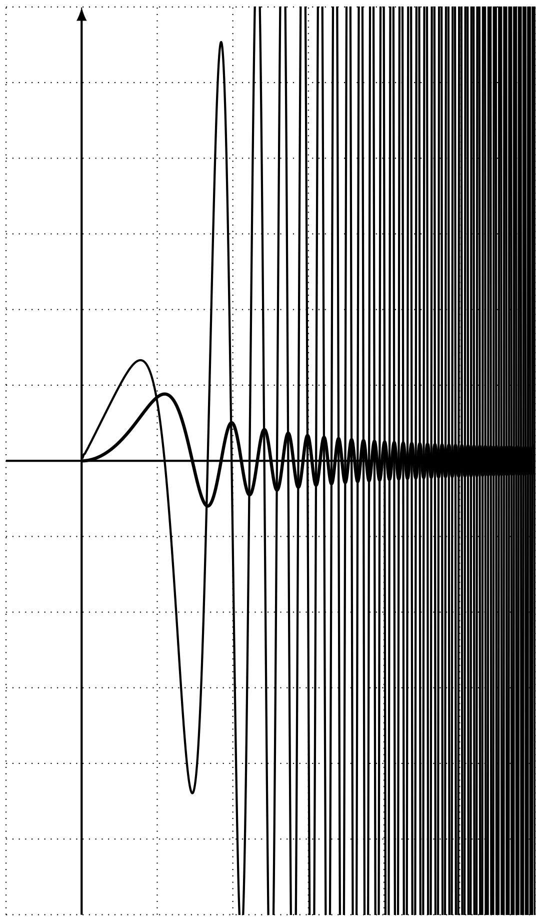
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[3]{2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et

$$\begin{aligned} f'(u_n) &= 3\sqrt[3]{2n\pi}\cos(2n\pi) - \frac{1}{(2n\pi)^{2/3}}\sin(2n\pi) \\ &= 3\sqrt[3]{2n\pi} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre que f' ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
On peut objecter que f n'est pas définie sur $\mathbb{R}_+$, mais il suffit alors de considérer $x \mapsto f(x+1)$ pour régler ce problème.



f



f et f′

Autocorrection B.

On peut montrer $f'(0) \geqslant 0$.

En effet, on peut trouver $\eta \in]0,1]$ tel que $\forall x \in [0,\eta], f(x) \geqslant f(0)$. Quel que soit $h \in [0,\eta]$, on a

$$f(h) \geqslant f(0) \quad \text{donc} \quad \frac{f(h)-f(0)}{h} \geqslant 0.$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a donc

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \geqslant 0.$$

En revanche, on ne peut conclure $f'(0) = 0$, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x$.

Autocorrection C.

Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^4 + bx^3 + cx^2. \end{cases}$$

Cette fonction est lisse par opérations. En particulier, elle est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $x \in]0,1[$ tel que

$$f'(x) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$