Représentation matricielle des applications linéaires

Autocorrection A. ☑

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f : (x, y, z) \mapsto (x - z, y, y)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire une formule probable pour A^n, puis la démontrer, par récurrence.
3. En déduire l'expression de f^n.

Autocorrection B. ☑

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P + P'$.
   Déterminer la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   En déduire que Δ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et résoudre l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.

Autocorrection C. ☑

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$ et $\mathcal{C} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sont des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$, respectivement.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (1, -2, 5, 6)$ dans la base $\mathcal{B}$
   (a) en résolvant un système linéaire ;
   (b) en calculant la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique.
3. Soit
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x - 2y + 2z + 5t, x - 2y + 3z + 4t, -x + 2z - 3t). \end{cases}$$
   (a) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exercice 1. ☑

Soit $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Combien vaut $\mathrm{rg}(AB)$? En déduire $\mathrm{rg}\, A$ et $\mathrm{rg}\, B$.
2. Déterminer $\ker(AB)$ et $\mathrm{im}(AB)$. En déduire $\ker B$ et $\mathrm{im}\, A$.
3. Que vaut BA ?

Exercice 2.

Montrer que les applications linéaires suivantes sont bien définies et déterminer leurs matrices dans les bases canoniques.

1. $\begin{cases} K_3[X] \to K_5[X] \\ P \mapsto 2X^3P' + P'(X^2) - P(1) \end{cases}$;
2. $\begin{cases} K_3[X] \to K^2 \\ P \mapsto (P(-1), P'(0) + P''(1)) \end{cases}$;
3. $\begin{cases} K_n[X] \to K_n[X] \\ P \mapsto XP' \end{cases}$;
4. $\begin{cases} K_n[X] \to K_n[X] \\ P \mapsto 2P + (X-1)P'. \end{cases}$

Exercice 3.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : x \mapsto x^k\, e^{\alpha x}$ (que l'on voit comme un élément de $C^\infty(\mathbb{R})$).

1. Quelle est la dimension de $E = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$?
2. Montrer que l'opérateur de dérivation ∂ définit un endomorphisme de E, et que cet endomorphisme est un automorphisme si et seulement si $\alpha \neq 0$.

Exercice 4.

Soit $\mathcal{F} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \right\}$.

1. Donner une base $\mathcal{B}$ du sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $T : \begin{cases} \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
3. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ et en déduire que T est un automorphisme de $\mathcal{F}$.

Exercice 5.

Soit $a, b, c, d \in K$. Déterminer la matrice de l'endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} M_2(K) & \to & M_2(K) \\ M & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M \end{array}$$

dans la base $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ de $M_2(K)$. Généraliser.

Exercice 6.

1. Montrer que $f : \begin{cases} K_3[X] \to K_3[X] \\ P \mapsto X^2P'' + 2XP' \end{cases}$ est un endomorphisme de $K_3[X]$.
   Déterminer sa matrice dans la base canonique de $K_3[X]$ et en déduire $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$.
2. L'application $g : \begin{cases} K_2[X] \to K_2[X] \\ P \mapsto (X^2-1)P' - (2X+1)P \end{cases}$ est-elle un automorphisme ?

Exercice 7$^+$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que n est pair si et seulement si $\exists f \in \mathcal{L}(E) : \mathrm{im}\, f = \ker f$.
2. On suppose n pair. Montrer que pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{im}\, f = \ker f \Leftrightarrow \mathrm{rg}\, f = n/2$ et $f^2 = 0$.

Exercice 8$^+$ (Interpolation de Lagrange et matrice de Vandermonde). ☑

1. Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)). \end{cases}$
   Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire que la *matrice de Vandermonde*

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$$

   est inversible.

Changement de bases (et un peu de réduction)

Autocorrection D. ☑

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme associé dans la base $\mathcal{B}$ à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $e_1' = e_2 + e_3$, $e_2' = e_1 - e_2 + e_3$ et $e_3' = e_1 - e_2$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E.
2. Calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
3. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ et son inverse.
4. Exprimer A en fonction de D et P.
5. En déduire une expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$f : (x, y, z) \mapsto (3x - 4y - 2z, 4x - 7y - 4z, -5x + 10y + 6z)$$
$$g : (x, y, z) \mapsto (5x - 8y - 4z, 8x - 15y - 8z, -10x + 20y + 11z).$$

1. Montrer que f est un projecteur et trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. Montrer que g est une symétrie et trouver une base dans laquelle la matrice de g est diagonale.

Exercice 10. ☑

Soit φ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer les espaces propres de φ.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. À quelle condition existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n$?
2. À quelle condition existe-t-il deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = I_n$?

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $u^2 = -\,\mathrm{id}_E$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $\lambda \neq \mu \in K$ tels que $(u - \lambda\ \mathrm{id}_E) \circ (u - \mu\ \mathrm{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\ker(u - \lambda\ \mathrm{id}_E) \oplus \ker(u - \mu\ \mathrm{id}_E) = E$.
2. Montrer qu'il existe une base de K^n dans laquelle u s'écrit $\mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \mu)$.

Exercice 14. ☑

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On définit la *trace* de f comme $\mathrm{tr}\, f = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$, où $\mathcal{B}$ est une base de E. Montrer que cette quantité est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $\pi \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
   (a) En travaillant avec une base intelligente, déterminer $\mathrm{tr}(\pi)$.
   (b) Résoudre l'exercice suivant, populaire mais à peu près infaisable sans le contexte.

   Montrer que si $M \in M_n(K)$ est telle que $M^2 = M$, alors $\mathrm{tr}\, M \in \mathbb{N}$.
3. Quel est l'exercice analogue pour les symétries ?

Exercice 15$^+$. ☑

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un *drapeau complet* de l'espace E est une famille

$$\{0_E\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n = E$$

de sous-espaces vectoriels inclus les uns dans les autres, tels que $\forall i \in [\![0, n]\!], \dim F_i = i$.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ *stabilise* le drapeau $(F_i)_{i=0}^n$ si $\forall i \in [\![1, n]\!], u[F_i] \subseteq F_i$.

1. Montrer que u stabilise un drapeau complet si et seulement si sa matrice dans une certaine base est triangulaire supérieure.
2. Utiliser l'idée de drapeau complet pour montrer que si $A \in T_n^+(\mathbb{R})$ a des coefficients diagonaux nuls, alors $A^n = 0$.

Exercice 16$^+$.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 17$^+$.

Dans la suite, on fixe $n \geqslant 2$ et on note, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}(A)$ la classe de similitude de A.

1. Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall M \in \mathcal{O}(A), [M]_{1,1} = 0$.
2. Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall M \in \mathcal{O}(A), [M]_{1,2} = 0$.

Rang des matrices

Autocorrection E. ☑

Calculer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$. Sont-elles libres ? génératrices ? des bases ? Compléter celles qui sont libres mais non génératrices en des bases, et extraire des bases de celles qui sont génératrices mais pas libres.

(i) $((1,2,5,4),(2,4,10,7))$;

(ii) $((1,2,3),(-5,-10,-15))$;

(iii) $((1,-2,7),(0,-12,35),(0,0,2))$;

(iv) $((3,1,-4,6),(1,1,4,4),(1,0,-4,a))$ (en fonction de $a \in \mathbb{R}$).

Autocorrection F. ☑

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On introduit les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Sans calculs, déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{im}\, f$.

Exercice 18. ☑

Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques, et calculer le rang desdites applications linéaires.

(i) $\begin{cases} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x+y) \end{cases}$;

(ii) $\begin{cases} \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y-z) \end{cases}$;

(iii) $\mathrm{tr} : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$;

(iv) $\begin{cases} M_2(\mathbb{C}) & \to & M_2(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & M^T \end{cases}$.

Exercice 19. ☑

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que le rang de $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est supérieur ou égal à 2.

   Pour quelles valeurs de a et b ce rang vaut-il exactement 2 ?
2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Quel est le rang des matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & a & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n]\!]$.

Montrer que les applications suivantes sont bien définies, linéaires et déterminer leur rang.

(i) $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$;

(ii) $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P^{(r)} \end{cases}$;

(iii) $\begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_8[X] \\ P \mapsto (X^4 + 3X^2 - 2X + 7)P \end{cases}$;

(iv) $\begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X] \\ P \mapsto X(P' - P'(0)) \end{cases}$;

(v) $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' - P \end{cases}$;

(vi) $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P \mapsto P(X^2) \end{cases}$.

Exercice 21.

On note $\mathcal{S} = \left\{ f \in C^3(\mathbb{R}) \,\middle|\, f''' = f' \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel réel et que $\mathcal{B} = (\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, 1)$ en est une base.
   (On pourra admettre les résultats sur les équations différentielles vus en cours de physique.)
2. Montrer que $T : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ f \mapsto f + f' \end{cases}$ définit un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$.
3. Calculer $\operatorname{rg} T$.

Exercice 22^{++}.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer $\max\{\operatorname{rg}(UA + BV) \mid U, V \in GL_n(\mathbb{R})\}$ en fonction de $\operatorname{rg} A$ et $\operatorname{rg} B$.

Exercice 23.

Déterminer le rang de $(\max(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 24.

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer le rang de la matrice $\big(\sin(i + j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 25.

Montrer que l'ensemble des matrices de rang 1 est $\left\{ x\, y^T \,\middle|\, x, y \in K^n \setminus \{0_{K^n}\} \right\}$.

Exercice 26.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subseteq E$ est stable par u si et seulement si $F \subseteq \ker u$ ou $\operatorname{im} u \subseteq F$.

Exercice 27^{+}.

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 1, et $x_1 \in K^n$ tel que $\operatorname{im} M = \operatorname{Vect}(x_1)$.

1. Montrer que si $Mx_1 \neq 0_{K^n}$, alors M est semblable à $\lambda\, E_{1,1}$, pour un certain $\lambda \in K$.
2. Montrer que si $Mx_1 = 0_{K^n}$, alors M est semblable à $E_{1,2}$.
3. En déduire que $M^2 = \operatorname{tr}(M)\, M$.

Exercice 28⁺ (Théorème de Graham et Pollak).

On fait disputer à n joueurs m matchs de ballon prisonnier : lors du k-ième match, on forme deux équipes : la bleue B_k et la rouge R_k ; ces deux équipes n'ont pas nécessairement le même nombre de joueurs, et tous les joueurs ne jouent pas tous les matchs (mais les équipes sont toujours non vides). On suppose qu'au bout des m matchs, chaque joueur aura affronté chaque autre une et une seule fois.

1. On définit la matrice M_k dont le coefficient $[M_k]_{i,j}$ vaut 1 si, lors du k-ème match, le i-ème joueur était bleu et le j-ème rouge, et 0 dans tous les autres cas. Déterminer son rang.
2. On pose $M = \sum_{k=1}^{m} M_k$. Calculer $M + M^T$.
3. Montrer que si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a un rang $\leqslant n-2$, alors il existe un vecteur v non nul, mais dont la somme des coordonnées est nulle, dans le noyau de A.
4. En considérant la fonction $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ v \mapsto v^T\,(M+M^T)\,v, \end{cases}$ déduire de ce qui précède que $m \geqslant n-1$.
5. Montrer qu'il est possible de remplir la contrainte de l'énoncé pour $m = n-1$.

Exercice 29.

Déterminer les $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), MXN = 0$.

Exercice 30⁺.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B + \lambda A$ soit inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 31⁺.

1. Montrer que $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A \mapsto (X \mapsto \operatorname{tr}(AX)) \end{cases}$ est un isomorphisme.
2. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Mélange

Exercice 32.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer le rang de $\begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ v \mapsto u \circ v. \end{cases}$

Exercice 33.

1. Montrer que le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est en bijection avec l'ensemble des bases de $\mathbb{K}^n$.
2. En déduire le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})$, quand $\mathbb{K}$ est un corps fini.

Exercice 34.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que f *se factorise à travers* un espace vectoriel de dimension finie V si l'on peut trouver deux applications linéaires $\alpha \in \mathcal{L}(E, V)$ et $\beta \in \mathcal{L}(V, F)$ telles que $f = \beta \circ \alpha$.

Quelle est la dimension minimale d'un espace vectoriel à travers lequel f se factorise ?

Exercice 35$^+$. *ÉNS*

Trouver toutes les fonctions $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), f(AB) \leqslant \min(f(A), f(B)).$$

Exercice 36.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit

$$A(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}.$$

1. Montrer que $A(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\dim A(f) = (\dim \ker f)^2$.