Arithmétique des polynômes

Exercice 10.

On n'oubliera pas que le théorème de Rolle s'applique également à des fonctions non polynomiales !

Exercice 12.

En notant $P = U + iV$ et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, on pourra montrer $\forall z \in \mathbb{H}, |P(z)| < |P(\bar{z})|$.

Exercice 22.

Une fois déterminé le degré des suspects, on pourra raisonner en terme de multiplicité de racines plutôt que de se jeter dans un calcul un peu bourrin.

Exercice 32.

1. Pour la première question, on pourra écrire ce sous-groupe comme l'image d'un morphisme.
2. ▸ Pour l'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$, on peut calculer $(X^4 + 1) \circ (X + 1)$.
   ▸ Pour la réductibilité sur $\mathbb{F}_p$, on pourra écrire trois factorisations de $X^4 + 1$ en produit de deux polynômes de degré 2 sur $\mathbb{C}$, et montrer que l'une d'entre elles possède un analogue dans $\mathbb{F}_p$.

Exercice 35.

On pourra commencer par montrer que toutes les racines de P appartiennent à $\{j, j^2\}$, ce qui était d'ailleurs un exercice dans une feuille précédente.

Exercice 39.

Pour la deuxième question, on pourra se demander à quoi ressemble la décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme à valeurs réelles.

Exercice 41.

On pourra montrer l'existence de $t \in \mathbb{N}^*$ et $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $PU + QV = t$, puis montrer que la suite $\big(P(n) \wedge Q(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est t-périodique.

Exercice 43.

Pour la deuxième question, on pourra étudier les points critiques de Q.

Autocorrection

Autocorrection A.

1. ▸ Le reste dans la division euclidienne par $X^4 + X^2$ est toujours un élément de $\mathbb{C}_3[X]$, ce qui prouve que f est bien défini.

- Si $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on peut écrire les divisions euclidiennes

$$\begin{aligned}(X^4-1)P_1 &= (X^4+X^2)Q_1 + R_1\\ (X^4-1)P_2 &= (X^4+X^2)Q_2 + R_2,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(X^4-1)(P_1+\lambda P_2) = (X^4+X^2)(Q_1+\lambda Q_2) + (R_1+\lambda R_2),$$

ce qui donne $f(P_1+\lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2$, et montre que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_3[X])$.

- On calcule
  - $X^4 - 1 = X^4 + X^2 + (-X^2 - 1)$ donc $f(1) = -1 - X^2$;
  - $(X^4-1)X = X^5 - X = (X^4+X^2)X + (-X^3 - X)$ donc $f(X) = -X - X^3$;
  - $(X^4-1)X^2 = X^6 - X^2 = (X^4+X^2)(X^2-1)$ donc $f(X^2) = 0$;
  - $(X^4-1)X^3 = X^7 - X^3 = (X^4+X^2)(X^3 - X)$ donc $f(X^3) = 0$,

  donc la matrice de f dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. La matrice M est clairement de rang 2, de noyau $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et d'image $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

   On en déduit que f est de rang 2, de noyau $\mathrm{Vect}(X^2, X^3)$ et d'image $\mathrm{Vect}(1+X^2, X+X^3)$.

Autocorrection B.

On a

- $P(1) = 1 - (2n+1) + (2n+1) - 1 = 0$, donc 1 est racine de P.
- $P' = (2n+1)X^{2n} - (2n+1)(n+1)X^n + (2n+1)nX^{n-1}$, donc

$$\begin{aligned}P'(1) &= (2n+1) - (2n+1)(n+1) + (2n+1)n\\ &= 0,\end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P'.
- $P'' = (2n+1)(2n)X^{2n-1} - (2n+1)(n+1)nX^{n-1} + (2n+1)n(n-1)X^{n-2}$ donc

$$\begin{aligned}P''(1) &= (2n+1)(2n) - (2n+1)(n+1)n + (2n+1)n(n-1)\\ &= (2n+1)n\,[2 - (n+1) + (n-1)]\\ &= 0,\end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P''.
- $P''' = (2n+1)(2n)(2n-1)X^{2n-2} - (2n+1)(n+1)n(n-1)X^{n-2} + (2n+1)n(n-1)(n-2)X^{n-3}$ donc

$$\begin{aligned}P'''(1) &= (2n+1)(2n)(2n-1) - (2n+1)(n+1)n(n-1) + (2n+1)n(n-1)(n-2)\\ &= (2n+1)n\,[2(2n-1) - (n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)]\\ &= (2n+1)n\,[4n - 2 - (n-1)\,[(n+1) - (n-2)]]\\ &= (2n+1)n(n+1) \neq 0,\end{aligned}$$

  donc 1 n'est pas racine de P'''.

D'après le lien avec les dérivées, on a donc $\mu_1(P) = 3$.

Autocorrection C.

(i) D'après le théorème de Bézout, cette équation admet une solution si et seulement si les polynômes $P = X^4 - X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^3 - 7X - 6$ sont premiers entre eux. On effectue l'algorithme d'Euclide (en se débarrassant des coefficients dominants pénibles à chaque étape) :

$$P = \underbrace{(X^3 - 7X - 6)}_{Q}(X-1) + 6X^2 - 2X - 8 \qquad \text{donc} \qquad P \wedge Q = Q \wedge (3X^2 - X - 4)$$

$$X^3 - 7X - 6 = (3X^2 - X - 4)\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{9}\right) + \left(-\frac{50}{9}X - \frac{50}{9}\right) \qquad = (3X^2 - X - 4) \wedge (X+1)$$

$$3X^2 - X - 4 = (X+1)(3X-4) + 0 \qquad = (X+1) \wedge 0 = X + 1.$$

On en déduit que P et Q ne sont pas premiers entre eux, et l'équation proposée n'a pas de solution.

(ii) Comme $X + 1$ divise à la fois P et Q, il divise tout polynôme de la forme $PA + QB$.
Puisque $X + 1$ ne divise pas $X + 3$, l'équation proposée n'a toujours pas de solution.

(iii) Les polynômes $X^2 + 2X + 3$ et $X^2 - X - 3$ sont premiers entre eux (ce que l'on vérifie soit en effectuant l'algorithme d'Euclide, soit en constatant que le premier n'a pas de racine réelle, car son discriminant est < 0, alors que le second est scindé sur $\mathbb{R}$, donc ils ne peuvent pas avoir de racine complexe commune).
On procède alors par analyse et synthèse.

Analyse. Soit (A, B) une solution.

- Le polynôme X^2+2X+3 divise alors $(X^2-X-3)B$ tout en étant premier avec X^2-X-3 donc, d'après le lemme de Gauss, il divise B.
- Le même argument montre que $X^2 - X - 3$ divise A.
- On peut donc écrire $A = (X^2 - X - 3)\widetilde{A}$ et $B = (X^2 + 2X + 3)\widetilde{B}$.
  Par intégrité de K[X] l'équation devient alors $\widetilde{A} + \widetilde{B} = 0$.

Synthèse. Réciproquement, tout couple de la forme $\big((X^2 - X - 3)D, -(X^2 + 2X + 3)D\big)$ est manifestement solution de l'équation.

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \big((X^2 - X - 3)D, -(X^2 + 2X + 3)D\big) \;\middle|\; D \in K[X] \right\}.$$

(iv) Là encore, les polynômes X^2 et $2X + 1$ sont premiers entre eux. On trouve facilement la relation de Bézout

$$4X^2 - (2X-1)(2X+1) = 1,$$

d'où l'on obtient la solution $(A_0, B_0) = \big(4(X+2), -(2X-1)(X+2)\big) = \big(4X+8, -2X^2-3X+2\big)$.
Si l'on cherche maintenant les solutions sous la forme $(A_0 + A_1, B_0 + B_1)$, ce qui est toujours possible, l'équation devient

$$X^2 A_1 + (2X+1) B_1 = 0.$$

Les mêmes méthodes qu'à la question précédente montrent que les solutions sont les couples de la forme $(A_1, B_1) = \big((2X+1)D, -X^2D\big)$, quand $D \in K[X]$.
In fine, les solutions forment l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{ \big(4X + 8 + (2X+1)D, -2X^2 - 3X + 2 - X^2 D\big) \;\middle|\; D \in K[X] \right\}.$$

Autocorrection D.

Première méthode. On utilise la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(X+1)^n - nX - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - nX - 1\\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k\\ &= X^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^{k-2}}_{\in K[X]},\end{aligned}$$

donc ce polynôme est divisible par X^2.

Deuxième méthode. Notons $P = (X+1)^n - nX - 1$. On observe :

- que $P(0) = (0+1)^n - n\,0 - 1 = 0$, donc 0 est racine de P ;
- que $P' = n(X+1)^{n-1} - n$, donc $P'(0) = n1^{n-1} - n = 0$.

On a donc $\mu_0(P) \geqslant 2$. Comme $X^{\mu_0(P)}$ divise (par définition) P, on en déduit que X^2 divise P.

Autocorrection E.

On utilise ici la notation classique $\zeta_n = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

(i) Sur $\mathbb{C}$: $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$;
Sur $\mathbb{R}$, le polynôme est irréductible.

(ii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4 - 4 = (X^2 - 2)(X^2 + 2) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)$.
Sur $\mathbb{R}$: $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 2)$.

(iii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4 + 1 = (X - \zeta_8)(X - \zeta_8^3)(X - \zeta_8^5)(X - \zeta_8^7)$ (les racines sont les racines quatrièmes de -1).
Sur $\mathbb{R}$, on rassemble les racines conjuguées :

$$\begin{aligned}X^4 + 1 &= (X - \zeta_8)(X - \zeta_8^3)(X - \zeta_8^5)(X - \zeta_8^7)\\ &= \left[(X - \zeta_8)(X - \zeta_8^7)\right]\left[(X - \zeta_8^3)(X - \zeta_8^5)\right]\\ &= \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right).\end{aligned}$$

(iv) Sur $\mathbb{C}$: $X^6 + 27 = \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_6} \left(X - \omega\, i\sqrt{3}\right) = \prod_{\substack{k \in [\![0,11]\!] \\ k \text{ impair}}} \left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}^k\right)$.

Sur $\mathbb{R}$ (un petit dessin aide),

$$\begin{aligned}X^6 + 27 &= \left[\left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}\right)\left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}^{11}\right)\right]\left[\left(X - \sqrt{3}\,i\right)\left(X + \sqrt{3}\,i\right)\right]\left[\left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}^5\right)\left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}^7\right)\right]\\ &= (X^2 - 3X + 3)(X^2 + 3)(X^2 + 3X + 3).\end{aligned}$$

(v) Sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(X^2 - X + 1)^2 + 1 &= \left[\left(X^2 - X + 1\right) - i\right]\left[\left(X^2 - X + 1\right) + i\right]\\ &= \left(X^2 - X + (1 - i)\right)\left(X^2 - X + 1 + i\right)\\ &= (X + i)(X - (1 + i))(X - i)(X - (1 - i)).\end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(X^2 - X + 1)^2 + 1 &= \left[(X + i)(X - i)\right]\left[(X - (1 + i))(X - (1 - i))\right]\\ &= \left(X^2 + 1\right)\left(X^2 - 2X + 2\right).\end{aligned}$$

(vi) On se rend compte (soit successivement soit, si l'on sent l'arnaque, en vérifiant que les premières dérivées du polynôme ont 1 comme racine) que $(X-1)^3$ divise le polynôme. On obtient alors

$$\begin{aligned} X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1 &= (X-1)^3(X^2 - 7X + 1) \\ &= (X-1)^3 \left(X - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui est à la fois la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

(vii) L'indication montre qu'il existe une racine z telle que la somme des trois racines vaille $2z$. D'après les relations coefficients-racines, cette somme vaut en fait 8, donc on obtient que 4 est racine. Ainsi,

$$X^3 - 8X^2 + 23X - 28 = (X-4)(X^2 - 4X + 7),$$

ce qui est la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ s'obtient alors immédiatement :

$$X^3 - 8X^2 + 23X - 28 = (X-4)(X - (2 + \sqrt{3}\,i))(X - (2 - \sqrt{3}\imath)).$$

(viii) L'indication nous permet d'obtenir une factorisation de la forme

$$X^4 + 12X - 5 = (X^2 - 2X + a)(X^2 + bX + c),$$

d'où l'on tire immédiatement $b = 2$ puis, rapidement, $a = 5$ et $c = -1$.
Ainsi,

$$X^4 + 12X - 5 = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X - 1) = (X^2 - 2X + 5)(X + 1 + \sqrt{2}))(X + 1 - \sqrt{2}),$$

ce qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
On obtient alors la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4 + 12X - 5 = (X - (1+2i))(X - (1-2i))(X + 1 + \sqrt{2}))(X + 1 - \sqrt{2}).$$