Fractions rationnelles

Généralités

Autocorrection A.

Déterminer les $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(X+1) = F(X)$.

Autocorrection B.

Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = \dfrac{1}{X}$.

Exercice 1.

Déterminer les $R \in \mathbb{C}(X)$ tel que $R^2 = \dfrac{X^2}{(X+1)(X+2)}$.

Exercice 2.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mu_z : \begin{cases} \mathbb{C}(X) \to & \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ \dfrac{P}{Q} & \mapsto \mu_z(P) - \mu_z(Q) \end{cases}$ est une application bien définie.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \dfrac{1}{X}$.

Exercice 3.

Déterminer les $R \in \mathbb{C}(X)$ tels que $R' = \dfrac{1}{X^2+1}$.

Exercice 4.

Soit $R \in \mathbb{R}(X)$ non constante telle que $R\left(\dfrac{X^2}{1+X^2}\right) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que 1 est un pôle de R.

Exercice 5$^+$.

Si $R \in \mathbb{C}(X)$, on note $P_R \subseteq \mathbb{C}$ l'ensemble des pôles de R. On définit également *l'image* de R :

$$\operatorname{im} R = \{R(x) \mid x \in \mathbb{C} \setminus P_R\}.$$

Quelles sont les parties de $\mathbb{C}$ qui sont des images de fractions rationnelles ?

Exercice 6$^+$.

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle. Montrer que la suite $\left(\dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une certaine relation de récurrence linéaire (non triviale) à coefficients constants.

Décomposition en éléments simples

Autocorrection C.

Soit $A = X^2+1$ et $B = (X-1)^2$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{AB}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ et en déduire une relation de Bézout entre A et B.

Autocorrection D.

Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes.

(i) $\dfrac{X+1}{X^2+X+1}$; (iii) $\dfrac{1}{(X^2-1)(X+1)^2}$; (v) $\dfrac{X^4+1}{X^4-1}$; (vii) $\dfrac{X^3-1}{(X-2)^2}$;

(ii) $\dfrac{1}{(X+1)^2(3-X)}$; (iv) $\dfrac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2}$; (vi) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$; (viii) $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$;

(ix) $\dfrac{X^2+X+1}{X^3+X^2+X+1}$; (x) $\dfrac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2}$.

Exercice 7.

1. Donner un $DL_7(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.
2. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^3+1}{X^8(X^2+1)}$.

Exercice 8.

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les décompositions en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes :

(i) $\dfrac{X^2+X+1}{X^n}$; (iii) $\dfrac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)}$;

(ii) $\dfrac{X^{2n}}{(X^2+1)^n}$; (iv) $\dfrac{1}{X^n(1-X)^n}$.

Exercice 9.

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les décompositions en éléments simples sur $\mathbb{C}$ des fractions rationnelles suivantes :

(i) $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$; (iii) $\dfrac{X^n-1}{X^n+1}$;

(ii) $\left(\dfrac{n\,X^{n-1}}{X^n-1}\right)'$; (iv) $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

Exercice 10.

Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de $\left(\dfrac{1}{X^n-1}\right)'$, puis celle de $\dfrac{1}{(X^n-1)^2}$.

Exercice 11.

Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, et décomposer $\dfrac{1}{T_n}$ en éléments simples.

Applications

Autocorrection E.

Simplifier les expressions des suites $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12.

Déterminer les limites des suites $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13.

1. En décomposant en éléments simples de $\frac{P'}{P}$, déterminer tous les $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.
2. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14⁺.

Notons $\mathcal{D}=\left\{R' \,\middle|\, R\in\mathbb{C}(X)\right\}$.

1. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on appelle *résidu de* F *en* z, et on note $\text{rés}_z(F)$, le coefficient devant l'élément simple $\frac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de F.
   Montrer que $\mathcal{D}=\{F\in\mathbb{C}(X)\mid\forall z\in\mathbb{C},\text{rés}_z(F)=0\}$.
2. Montrer que $\left\{R' \,\middle|\, R\in\mathbb{R}(X)\right\}=\mathbb{R}(X)\cap\mathcal{D}$.

Exercice 15.

Soit $n\geqslant 2$ et $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme dont les racines $x_1,\dots,x_n$ sont simples et non nulles. En effectuant les décompositions en éléments simples de fractions rationnelles bien choisies, montrer

(i) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(x_k)}=0$; (ii) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k P'(x_k)}=-\frac{1}{P(0)}$; (iii) $\sum_{k=1}^{n}\frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}=0$.

Exercice 16.

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n\geqslant 1$. On note $Q=X(X-1)\cdots(X-n)$.

1. Montrer $\frac{P}{Q}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}P(k)\frac{1}{X-k}$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k)=n!$.
3. En déduire $\max\left\{|P(k)| \,\middle|\, k\in[\![0,n]\!]\right\}\geqslant\frac{n!}{2^n}$.

Exercice 17⁺.

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ simplement scindé.

On note $a_1<a_2<\dots<a_n$ ses racines et $b_1<\dots<b_{n-1}$ les racines de P'.

1. En décomposant en éléments simples $\frac{P'}{P}$ de deux façons différentes, montrer
$$\forall i\in[\![1,n]\!], n\prod_{j=1}^{n-1}(a_i-b_j)=\prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\k\neq i}}(a_i-a_k).$$
2. En déduire $\forall i\in[\![1,n-1]\!], a_i+\frac{a_{i+1}-a_i}{n}\leqslant b_i\leqslant a_{i+1}-\frac{a_{i+1}-a_i}{n}$.

Exercice 18^{++}.

1. Soit A une K-algèbre (on identifie K à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(1_A) \subseteq A$) et $a \in A$.
   Montrer que le morphisme d'évaluation $\mathrm{év}_a : K[X] \to A$ s'étend à $K(X)$ si et seulement si a est transcendant sur K.
2. Soit $L/\mathbb{C}$ une extension de dimension au plus dénombrable (c'est-à-dire telle qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de L pour laquelle $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = L$). Montrer $L = \mathbb{C}$.

Mélange

Exercice 19^{++}.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Montrer les assertions suivantes.

1. Si P est scindé, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k-1)}(x)\, P^{(k+1)}(x) \leqslant P^{(k)}(x)^2$.
2. P est simplement scindé si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k-1)}(x)\, P^{(k+1)}(x) < P^{(k)}(x)^2$.

Exercice 20^{++}.

1. Montrer que $\mathcal{O}_\infty = \{F \in K(X) \mid \deg F < 0\}$ est une sous-algèbre de $K(X)$.
2. Déterminer les idéaux de $\mathcal{O}_\infty$.

Exercice 21^{+++} (Théorème d'Ostrowski pour les corps de fonctions).

Une *valeur absolue* sur un corps F est une application $|\cdot| : F \to \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall x \in F, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\forall x, y \in F, \big(|xy| = |x|\,|y| \text{ et } |x+y| \leqslant |x| + |y|\big)$.

Elle est dite *triviale* si $\forall x \in F^*, |x| = 1$.

Deux valeurs absolues $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ sont dites *équivalentes* si $\exists \alpha > 0 : \forall x \in F, |x|_2 = |x|_1^\alpha$.

1. Construire, pour tout polynôme irréductible unitaire $P \in K[X]$, une valeur absolue non triviale $|\cdot|_P$ sur le corps $F = K(X)$. On montrera en outre :
   - que ces valeurs absolues vérifient l'*inégalité ultramétrique* $\forall x, y \in K(X), |x+y| \leqslant \max\big(|x|, |y|\big)$;
   - que si P et Q sont deux polynômes irréductibles unitaires différents, les valeurs absolues correspondantes ne sont pas équivalentes.
2. Construire une valeur absolue $|\cdot|_\infty$ sur $K(X)$ telle que tout polynôme non constant P vérifie $|P|_\infty > 1$.
3. Montrer que toute valeur absolue $|\cdot|$ non triviale sur $K(X)$ vérifiant la condition supplémentaire $\forall x \in K^*, |x| = 1$ est équivalente à l'un des exemples précédemment construits.
4. Montrer que si K est un corps fini, la condition supplémentaire énoncée dans la question précédente est inutile.
5. Montrer qu'en revanche, si $K = \mathbb{Q}$, on ne peut pas se passer de la condition supplémentaire.