

---

## Espaces euclidiens

---

**Exercice 6.**

On pourra définir  $\langle x|y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ , puis, pour montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire dont dérive la norme, vérifier notamment l'identité  $\forall x, y, z \in E, 2 \left\langle \frac{x + y}{2} \middle| z \right\rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$ .

**Exercice 7.**

On pourra montrer l'identité du parallélogramme généralisée :  $\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$ .

**Exercice 9.**

Pour la deuxième question, on pourra utiliser l'inégalité subtile  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P^2 \leq \int_{-1}^1 P^2$ .

**Exercice 12.**

Faire un dessin !

**Exercice 15.**

Deux idées possibles :

- ▶ utiliser la positivité des déterminants de Gram vue dans un exercice précédent ;
- ▶ voir  $E$  comme un hyperplan de vecteur normal  $e_0$  dans un espace euclidien  $\widehat{E}$  (comment est-ce possible ?) et considérer la famille orthogonale  $(e_0 + x_1, \dots, e_0 + x_n)$ .

**Exercice 19.**

Pour la décomposition QR, on pourra utiliser le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

**Exercice 24.**

On pourra trouver une manière de modifier la définition de  $F$ , de telle sorte qu'un vecteur normal à  $F$  devienne immédiatement apparent.

**Exercice 29.**

On pourra s'intéresser à  $\text{tr Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ .

## Autocorrection

**Autocorrection A.**

On vérifie successivement les axiomes.

**Positivité.** Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a  $\langle P|P \rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$ .

**Caractère défini.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\langle P|P \rangle = 0$ .

On a donc  $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$ . La fonction polynomiale  $t \mapsto P(t)^2$  étant positive et continue, on en déduit que  $\forall t \in [0, 1], P(t) = 0$  par stricte positivité de l'intégrale.

D'après le critère radical de nullité, on en déduit  $P = 0$ .

**Symétrie.** La symétrie est claire.

**Bilinéarité.** La bilinéarité de  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale : pour tous  $P, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\langle P | Q_1 + \lambda Q_2 \rangle = \int_0^1 (P(t) Q_1(t) + \lambda P(t) Q_2(t)) dt = \int_0^1 P(t) Q_1(t) dt + \lambda \int_0^1 P(t) Q_2(t) dt = \langle P | Q_1 \rangle + \lambda \langle P | Q_2 \rangle.$$

(Remarquons que la symétrie dispense de vérifier la linéarité par rapport à la première variable.)

**Autocorrection B.**

---

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  :

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \times 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}} \sqrt{\sum_{k=0}^n 1^2} = 2^{n/2} \sqrt{n+1}.$$

2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Pour le produit scalaire canonique sur  $M_n(\mathbb{R})$ , on a  $\text{tr}(A) = \text{tr}(I_n^T A) = \langle I_n | A \rangle$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$|\langle I_n | A \rangle| \leq \|I_n\| \|A\| = \sqrt{n} \|A\|.$$

3. Il y a beaucoup de manières de montrer ce résultat, mais il suffit par exemple d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sous la forme  $\langle y | z \rangle^2 \leq \|y\|^2 \|z\|^2$ ) dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  à deux vecteurs bien choisis :

$$n^2 = \left( \sum_{k=1}^n 1 \right)^2 = \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right) \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

**Autocorrection C.**

---

Il suffit de se souvenir que  $\underbrace{p(x)}_{\in F} \perp \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp}$ , donc

$$d(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2 = \langle x - p(x) | x - p(x) \rangle = \langle x | x - p(x) \rangle + \underbrace{\langle p(x) | x - p(x) \rangle}_{=0}.$$

**Autocorrection D.**

---

(i) Il s'agit, dans  $C^0([0, 1])$  muni du produit scalaire  $L^2$ , de trouver la distance au carré de  $i : t \mapsto t$  au plan  $F = \text{Vect}(r : t \mapsto \sqrt{t}, u : t \mapsto 1)$ .

► Le projeté orthogonal de  $i$  sur  $F$  est l'unique élément  $ar + bu$  de  $F$  faisant avec les éléments de  $F$  les mêmes produits scalaires que  $i$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \langle ar + bu | u \rangle = \langle i | u \rangle \\ \langle ar + bu | r \rangle = \langle i | r \rangle \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} \frac{2}{3}a + b = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Après résolution du système, on trouve que le projeté est  $p = \frac{6}{5}r - \frac{3}{10}u : t \mapsto \frac{6}{5}\sqrt{t} - \frac{3}{10}$ .

► La distance au carré cherchée est donc

$$\begin{aligned}
 \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - (a\sqrt{t} + b))^2 dt &= \|i - p\|^2 \\
 &= \langle i - p | i - p \rangle \\
 &= \langle i | i - p \rangle \quad (\text{car } p \perp i - p) \\
 &= \int_0^1 t \left( t - \left( \frac{6}{5}\sqrt{t} - \frac{3}{10} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{300}.
 \end{aligned}$$

(ii) On procède de même (ou de même que dans le cours). On cherche ici la distance au carré de  $X^3$  à  $F = \mathbb{R}_2[X]$  dans l'espace  $\mathbb{R}[X]$ , muni du produit scalaire canonique.

► En résolvant le système 
$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \frac{1}{4} \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c = \frac{1}{6} \end{cases}$$
 (traduisant que  $a + bX + cX^2$ , le projeté orthogonal cherché, possède les mêmes produits scalaires « contre » les éléments de  $F$  que le polynôme  $X^3$ ), on obtient que le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$  est  $\frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}$ .

► Cela donne la distance au carré cherchée :

$$\begin{aligned}
 \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - (a + bt + ct^2))^2 dt &= \|t \mapsto t^3 - (a + bt + ct^2)\|^2 \\
 &= \left\langle t \mapsto t^3 - (a + bt + ct^2) \middle| t \mapsto t^3 \right\rangle \quad (\text{Pythagore}) \\
 &= \frac{1}{2800}.
 \end{aligned}$$