Probabilités I

Espaces probabilisés finis

Autocorrection A. ☑
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Autocorrection B. ☑
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que

$$P(A) = \frac{7}{10}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cup B) = \frac{9}{10}.$$

Calculer $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

Autocorrection C. ☑
Déterminer une mesure de probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité du singleton $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 1. ☑
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. Montrer

$$P(A \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup B) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 3.$$

Exercice 2.
À quelles conditions sur x et $y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une mesure de probabilité P sur $\{1, 2, 3\}$ telle que $P(\{1, 2\}) = x$ et $P(\{2, 3\}) = y$?

Exercice 3.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements de probabilités p et q. Quelles sont les probabilités possibles pour $A \cap B$?

Exercice 4^{++}.
Soit, dans un espace probabilisé fini (Ω, P), $A_1, \dots, A_n$ des événements. On définit, pour tout indice $k \in [\![1, n]\!]$, $C_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à au moins } k \text{ des événements } A_1, \dots, A_n\}$.

Montrer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Autour de l'inclusion-exclusion

Exercice 5 (Inégalité de Boole). ☑
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements. Montrer que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Exercice 6$^+$.

Dans tout l'exercice, (Ω, P) est un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont des événements.

1. **(Deuxième) inégalité de Bonferroni.**
   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}(\omega) \leqslant \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(\omega)$.
   (b) En déduire $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j)$.
2. **Inégalité de Kounias.** En imitant la méthode précédente, montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} P(A_i \cap A_j).$$

Variables aléatoires

Exercice 7.

Soit $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ une suite croissante d'événements telle que $\forall i \in [\![0, n]\!], P(A_i) = \dfrac{i}{n}$.

On note N la variable aléatoire de comptage associée à cette suite, c'est-à-dire l'application

$$N : \begin{cases} \Omega \to & \mathbb{N} \\ \omega \mapsto & |\{i \in [\![1, n]\!] \mid \omega \in A_i\}|. \end{cases}$$

Donner sa loi.

Exercice 8.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que X et $-X$ aient la même loi.

Montrer qu'il existe un espace probabilisé fini (Ω', P') et deux variables aléatoires indépendantes $Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon : \Omega' \to \{\pm 1\}$ telles que X et εY aient la même loi.

Peut-on faire, en général, en sorte que $\Omega = \Omega'$?

Probabilités conditionnelles

Exercice 9$^+$ (Paradoxe de Simpson).

Dans un espace probabilisé fini, deux événements A et B sont dits *(strictement) positivement corrélés* si

$$P(A \cap B) > P(A)\,P(B).$$

1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$, avec $P(C) > 0$.
   Traduire sans probabilité conditionnelle le fait que A et B soient positivement corrélés pour la mesure de probabilité $P_C = P(\cdot|C)$.
   On dira alors que A et B sont *positivement corrélés sachant* C.
2. Construire un espace probabilisé fini (Ω, P) et trois événements $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que
   - Ni C ni $\overline{C}$ n'est négligeable.
   - Les événements A et B soient positivement corrélés.
   - Les événements A et B soient négativement corrélés sachant C.
   - Les événements A et B soient négativement corrélés sachant $\overline{C}$.

Exercice 10.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$. Montrer que

$$P(A \cap B | A \cup B) \leqslant P(A \cap B | A).$$

Indépendance

Exercice 11.

On lance n fois une pièce équilibrée. On note A_0 l'événement « le nombre total de *pile* est pair » et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k l'événement « le k-ième lancer tombe sur *pile* ».

Montrer que la famille d'événements $(A_k)_{k=0}^{n}$ n'est pas constituée d'événements mutuellement indépendants, mais que chacune de ses sous-familles strictes l'est.

Exercice 12.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B}).$$

Exercice 13 (Loi du 0-1). ☑

1. Soit $A \subseteq B$ deux événements indépendants. Montrer que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 1$.
2. Déterminer les événements indépendants d'eux-mêmes.

Exercice 14.

Soit $X, Y : \Omega \to [\![1, n]\!]$ deux variables aléatoires. On suppose que $\forall j \in [\![1, n]\!], P(Y = j) > 0$.

Soit $A = \big(P(X = i, Y = j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice A est de rang 1 si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Exercice 15.

On considère l'ensemble $\Omega_n = [\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

À quelle condition sur n peut-on trouver deux événements indépendants de probabilité non triviale (c'est-à-dire dans $]0, 1[$) ?

Exercice 16.

Soit (Ω, P) un espace probabilité fini. Montrer qu'il n'existe pas d'événements $A_1, \ldots, A_n$ indépendants, de réunion Ω et de même probabilité $p < 1$.

Exercice 17.

Soit $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ des événements mutuellement indépendants de probabilité appartenant à $]0, 1[$.

Montrer que $|\Omega| \geqslant 2^n$.

Exercice 18.

Soit Ω un univers fini à n éléments, muni de la mesure de la probabilité uniforme.

Montrer que le nombre maximum d'événements $A_1, \ldots, A_r$ indépendants et non triviaux (c'est-à-dire différents de $\varnothing$ et Ω) est le nombre $\Omega(n)$ de facteurs premiers de n, comptés avec multiplicité. Par exemple, $\Omega(7) = 1$, $\Omega(10) = 2$ et $\Omega(12) = 3$ car $12 = 2 \times 2 \times 3$.

Dénombrement déguisé

Autocorrection D.

On lance trois fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Déterminer la probabilité d'obtenir :

(i) au moins un six ;

(ii) exactement un six ;

(iii) au moins une paire ;

(iv) au moins une paire et une somme des résultats paire.

Exercice 19.

On pioche quatre cartes dans un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux trèfles et deux piques dans le cas :

(i) d'un tirage simultané ;

(ii) d'un tirage successif sans remise ;

(iii) d'un tirage successif avec remise.

Exercice 20$^+$.

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. Tous les jours, on tire aléatoirement deux boules de l'urne, jusqu'à épuisement.

1. Quelle est la probabilité pour qu'on ait vu tous les jours un tirage bicolore ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'on ait vu tous les jours un tirage unicolore ?

Exercice 21$^+$.

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire successivement toutes les boules, sans remise et on note N le numéro du tirage au cours duquel la première boule rouge est tirée.

Déterminer la loi de N.

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On joue à pile ou face $2n+1$ fois.

1. Calculer la probabilité que l'on ait obtenu *in fine* strictement plus de « pile » que de « face ».
2. Soit $k \in [\![1, 2n+1]\!]$.
   Calculer la probabilité que l'on obtienne « pile » pour la $(n+1)$-ième fois au k-ième lancer.
3. Montrer la formule

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} 2^{-k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 23$^+$.

On mélange un jeu de 52 cartes.

- Quelle est la probabilité que deux cartes noires ou deux cartes rouges se retrouvent côte à côte ?
- Quelle est la probabilité que deux rois se retrouvent côte à côte ?

Exercice 24 (Paradoxe des anniversaires).

Dans une classe de 30 étudiants, nés lors d'une année non bissextile, quelle est la probabilité que deux étudiants au moins aient la même date d'anniversaire ? (On pourra faire toutes sortes d'hypothèses simplificatrices, voire même s'interroger sur leur validité dans le monde réel.)

Variables de Bernoulli, variables binomiales et vaiid

Exercice 25.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Z_1, Z_2 \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$ deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $P(Z_1 = Z_2)$.

Exercice 26.
Soit X_1 et X_2 deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs p_1 et p_2. Montrer que les variables aléatoires suivent des lois de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

(i) X_1^2 ; (ii) $1 - X_1$; (iii) $X_1 X_2$.

Exercice 27.
On lance un dé n fois de suite et l'on note $X_1, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant les différents résultats.

1. Calculer $P(X_1 \cdots X_n \text{ pair})$.
2. Calculer $P(X_1 + \cdots + X_n \text{ pair})$.

Exercice 28.

1. On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'avoir une paire ?
2. Même question avec deux dés pipés de la même façon. Comparer le résultat avec celui de la question précédente.

Exercice 29.
Soit $T_1, \dots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in [\![1, n]\!], T_i \sim \mathcal{B}(1/i)$.

On note $N = \min\{k \in [\![1, n]\!] \mid T_k = 0\}$, avec la convention $\min \varnothing = 0$.

Déterminer la loi de N.

Exercice 30$^+$.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Quelle est la valeur de X la plus probable ?

Exercice 31.
Soit $p, q \in [0, 1]$. Déterminer toutes les lois conjointes possibles pour deux variables aléatoires X et Y telles que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$.

Exercice 32.
Soit $p \in]0, 1[$ et un entier $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 1$, considérons X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $n \mapsto P(X_n \geqslant k)$ est croissante.

Exercice 33$^+$ (Singes dactylographes).
On dispose d'un dé, dont les faces sont numérotées de 0 à 9. On le lance n fois.

1. Montrer que la probabilité qu'un six apparaisse au moins une fois tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
2. Montrer que la probabilité que deux six apparaissent consécutivement au moins une fois tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
3. Expliquer le titre de l'exercice.

Objets mathématiques aléatoires

Exercice 34$^+$.

Soit $n \geqslant 1$. On considère $\Omega = [\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'ensemble des multiples de d dans $[\![1, n]\!]$.

1. Calculer $P(A_d)$.
2. Soit $p_1 < \cdots < p_r$ les diviseurs premiers de n. Montrer que les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire la probabilité pour qu'un entier de Ω soit premier avec n, puis le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble des entiers de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n. (La fonction φ est appelée *indicatrice d'Euler*.)
4. Que vaut $\varphi(n)$ quand n est premier ou la puissance d'un nombre premier ? Se convaincre directement du résultat.

Exercice 35.

On tire au sort (indépendamment et de façon équiprobable) quatre entiers $a, b, c, d \in [\![-n, n]\!]$.

On note $p(n)$ la probabilité que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible. Montrer que $p(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 36.

Soit $A, B \sim \mathcal{U}(\mathcal{P}([\![1, n]\!]))$ indépendantes. Calculer les probabilités

(i) $P(A \subseteq B)$; (ii) $P(A \cap B = \varnothing)$; (iii) $P(|A \cap B| = 1)$.

Exercice 37.

Soit $X_1, \ldots, X_r : \Omega \to \mathcal{P}([\![1, n]\!])$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme.

Déterminer la loi du cardinal $|X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_r|$.

Exercice 38.

Un sous-groupe H de $\mathfrak{S}(n)$ est dit *transitif* si $\forall x, y \in [\![1, n]\!], \exists \sigma \in H : \sigma(x) = y$.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$. À quelle condition le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ engendré par σ est-il transitif ?
2. On considère une variable aléatoire X_n de loi uniforme sur $\mathfrak{S}(n)$.
   Calculer la probabilité p_n que le sous-groupe $\langle X_n \rangle$ engendré par X_n soit transitif.
3. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n de loi uniforme sur $\mathfrak{S}(n)$.
   On note q_n la probabilité que le sous-groupe $\langle X_n, Y_n \rangle$ engendré par X_n et Y_n soit transitif. Montrer $q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Divers *word problems*

Autocorrection E.

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. En fonction de p, quel avion choisissez-vous ?

Autocorrection F. ☑

Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer.

Déterminer les lois de X, $|X|$ et X^2.

Exercice 39. ☑

Lassés du pile ou face classique, Alice et Bob cherchent à en créer une variante. Alice propose la procédure suivante à Bob : elle jettera la pièce 11 fois et Bob 10 fois et le joueur obtenant le plus de pile gagnera. Pour compenser son lancer supplémentaire, Alice perdra en cas d'égalité.

Bob doit-il accepter cette procédure ?

Exercice 40.

On lance un dé pipé et on note X son résultat. On suppose que les faces paires ont toutes la même probabilité, les faces impaires également, mais qu'une face paire a deux fois plus de chance d'apparaître qu'une face impaire.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer $P(X \text{ pair})$ et $P(X \geqslant 3)$.

Exercice 41 (Loi de succession de Laplace).

Soit $n, r \in \mathbb{N}$. On se donne $r+1$ urnes, numérotés de 0 à r. L'urne numérotée k contient k boules rouges et $r-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard, puis on tire avec remise des boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit rouge, sachant que les n précédentes l'étaient ?
2. Que devient cette probabilité quand r tend vers $+\infty$?

Exercice 42 (Problème des boîtes d'allumettes de Banach).

Stefan Banach possède deux boîtes de n allumettes, une dans chaque poche. À chaque fois qu'il allume une cigarette, il choisit une de ses poches au hasard, et prélève une allumette dans la boîte correspondante.

À un moment, en allant prélever une allumette, il constatera que l'une de ses boîtes d'allumettes est vide (cela ne se passe pas au moment où il prélève la dernière, mais au moment où il échoue à prélever « l'après-dernière »).

On note X le nombre d'allumettes qu'il lui reste, dans l'autre poche, à ce moment-là. Déterminer la loi de X.

Exercice 43$^+$.

Les passagers d'un avion entrent successivement (dans l'ordre) dans l'avion et sont censés s'asseoir à leur place respective. Malheureusement, le premier passager ignore les consignes et s'assied au hasard. Ensuite, les passagers s'asseyent tous à leur place, sauf si celle-ci est déjà occupée. Dans ce cas, il s'assoit aléatoirement sur une des places restantes. Quelle est la probabilité que le dernier passager soit assis à sa place ?

Autocorrection G. ☑

On dispose d'un jeu de 32 cartes et de trois jeux de 52 cartes. On tire au sort l'un des quatre jeux, puis une carte dans ce jeu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de trèfle ?
2. Si l'on tire un as de trèfle, quelle est la probabilité qu'il provienne du jeu de 32 cartes ?

Exercice 44. ☑

Des individus $A_0, A_1, \dots, A_n$ se transmettent un nombre égal à 0 ou 1. Chaque individu A_k transmet le nombre reçu à A_{k+1}, de façon fidèle avec une probabilité p et en changeant le message avec une probabilité $1 - p$. Tous les individus se comportent de manière indépendante. Calculer la probabilité p_n pour que le nombre reçu par A_n soit le nombre « initial » donné par A_0.

Quelle est la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 45.

Un donjon contient N coffres et un dragon.

Le chef du donjon a mis, avec probabilité p, le trésor dans un des coffres, tiré au sort (et avec probabilité $1 - p$, il l'a confié au dragon).

Vous avez ouvert les $N - 1$ premiers coffres, sans succès.

Quelle est la probabilité pour que le trésor soit dans le dernier coffre ?

Exercice 46.

1. Un jeu de cartes contient les deux rois rouges et les deux dames rouges. On tire successivement de ce jeu deux cartes (sans remise).
   (a) Proposer un espace probabilisé fini rendant compte de cette expérience.
   (b) Interpréter les questions suivantes comme des calculs de probabilités conditionnelles (on définira précisément les événements), et les résoudre.
      i. On suppose qu'une de nos deux cartes est une dame. Quelle est la probabilité que l'on ait également tiré l'autre ?
      ii. On suppose qu'une de nos deux cartes est la dame de cœur. Quelle est la probabilité que l'on ait également tiré l'autre ?
2. En proposant un espace probabilisé fini raisonnable rendant compte de « l'expérience », résolvez la question classique suivante (on pourra faire toutes sortes d'hypothèses simplificatrices, mais il s'agira d'en être conscient).

   > Vous savez qu'une de vos relations a deux enfants, tout en ignorant leur sexe. Vous le croisez dans la rue accompagné d'un garçon, qu'il vous présente comme son fils. Quelle est la probabilité que son autre enfant soit une fille ?

Mélange

Exercice 47^{++}. *ÉNS*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe une variable aléatoire $X_n \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et on note p_n la probabilité que le premier chiffre après la virgule de $\sqrt{X_n}$ soit 1.

Déterminer la nature et l'éventuelle limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 48^{+++} (Lemme de Schwartz-Zippel).
Dans cet exercice, un polynôme en n variables est une application

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

où I est une partie finie (peut-être vide) de $\mathbb{N}^n$ et $(a_{i_1,\dots,i_n})_{(i_1,\dots,i_n)\in I}$ est une famille de réels non nuls.

Son *degré total* est alors $\max\{i_1 + \cdots + i_n \mid (i_1, \dots, i_n) \in I\}$, avec la convention usuelle que le maximum de l'ensemble vide est $-\infty$.

Soit $S \subseteq K$ une partie finie et $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ de degré total $d \in \mathbb{N}^*$.

On considère des variables aléatoires $U_1, \dots, U_n \sim \mathcal{U}(S)$ indépendantes. Montrer que

$$P(Q(U_1, \dots, U_n) = 0) \leqslant \frac{d}{|S|}.$$

Méthode probabiliste

Exercice 49^{+}.
Une partie S d'un groupe abélien $(A, +)$ est dite *sans somme* si $\forall a, b \in S, a + b \notin S$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 3k + 2$ soit premier. On considère $A \subseteq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ et $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
   On note $B_0 \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes modulo p des éléments de $[\![k + 1, 2k + 1]\!]$.
   Montrer que l'ensemble $B = A \cap (xB_0)$ est sans somme.
2. On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.
   Soit $A \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ finie non vide. Montrer qu'il existe $B \subseteq A$ sans somme tel que $|B| > \dfrac{|A|}{3}$.
3. Montrer le fait admis à la question précédente.

Exercice 50.
Un *tournoi* de taille n est la donnée de n équipes numérotées de 1 à n et, pour chaque paire $\{i, j\}$ avec $i \neq j$, d'un résultat appartenant à la paire $\{i \to j, j \to i\}$ (où $i \to j$ se lit « la i-ème équipe a battu la j-ième »). En d'autres termes, un tournoi est une orientation du graphe complet K_n.

1. L'entier n étant fixé, on définit un tournoi aléatoire où, pour chaque paire $i \neq j$, on décide l'issue du match ayant opposé les équipes i et j aléatoirement et équitablement, indépendamment des autres matchs.
   (a) Quelle est la probabilité qu'une équipe ait battu toutes les autres ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'on puisse classer les n équipes de telle sorte que chaque équipe ait battu toutes celles qui sont moins bien classées ?
   (c) Étant donné k équipes, quelle est la probabilité qu'une autre équipe les ait toutes battues ?
2. Un tournoi est dit k-*indécis* si, étant donné k équipes, on peut toujours trouver une équipe les ayant toutes battues. Montrer que la probabilité $P(n, k)$ qu'un tournoi aléatoire de taille n soit k-indécis tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ (*théorème d'Erdős*, 1963).
3. On dit qu'une équipe i *a presque tout gagné* si pour toute autre équipe j alors $i \to j$ ou il existe k telle que $i \to k \to j$. On définit pareillement la notion d'*avoir presque tout perdu*. Montrer que la probabilité $P(n)$ que toute équipe d'un tournoi de taille n ait à la fois presque tout gagné et presque tout perdu tend vers 1 quand $n \to +\infty$ (*théorème de Maurer*, 1980).
4. Montrer que dans tout tournoi, il existe une équipe qui a presque tout gagné (*théorème de Landau*, 1951).

Exercice 51.

Un *ensemble indépendant* dans un graphe est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents (de telle sorte que le graphe induit n'ait aucune arête). Le *nombre d'indépendance* $\alpha(\Gamma)$ d'un graphe est le cardinal maximal d'un tel ensemble indépendant.

Soit Γ un graphe à n sommets et $\dfrac{nd}{2}$ arêtes (où $d \geqslant 1$).

On définit un ensemble aléatoire de sommets X en demandant que chaque sommet du graphe appartienne à X avec probabilité p et indépendamment des autres.

On retire ensuite (selon une procédure choisie à l'avance) à X un nombre minimal de sommets de telle sorte à obtenir un ensemble indépendant $U \subseteq X$.

1. Montrer que $\mathbb{E}\,|U| \geqslant np - \dfrac{p^2 nd}{2}$.
2. Optimiser cette borne et en déduire une minoration de $\alpha(\Gamma)$.

Exercice 52.

Dans un graphe, un *ensemble dominant* est un ensemble de sommets U tel que tout sommet du graphe soit dans U ou adjacent à un sommet de U.

Soit Γ un graphe à n sommets et $p \in [0, 1]$.

On définit un ensemble aléatoire de sommets X en demandant que chaque sommet du graphe appartienne à X avec probabilité p et indépendamment des autres.

On définit alors l'ensemble Y des éléments de Γ qui ne sont ni dans X ni adjacents à un élément de X. Par construction, l'ensemble aléatoire $U = X \sqcup Y$ est un ensemble dominant.

1. Déterminer $\mathbb{E}|U|$ en fonction de l'application $d : \Gamma \to \mathbb{N}$ associant à chaque sommet son degré.
2. Dans la suite, on pose δ le degré minimal d'un sommet de Γ. Montrer que

$$\mathbb{E}|U| \leqslant n\left[p + e^{-p(\delta+1)}\right].$$

3. Optimiser cette borne et en déduire une majoration du cardinal minimum $\gamma(\Gamma)$ d'un ensemble dominant de Γ.