Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 02

Question 1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la quantité $\ln\left(\sqrt{x-1}-2\right)$ a-t-elle un sens ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. Cette quantité est définie ssi $x-1 \geq 0$ et $\sqrt{x-1}-2>0$, càd ssi $x \geq 1$ et $x-1>4$, càd $\boxed{\text{ssi } x>5.}$

Question 2. On définit la fonction $f : x \mapsto x^3+5x^2+8x+4$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(x-2)$.

$$\boxed{f(x-2)} = x^3-6x^2+12x-8 \qquad [(x-2)^3]$$
$$+5x^2-20x+20 \qquad [5(x-2)^2]$$
$$+8x-16 \qquad [8(x-2)]$$
$$+4$$
$$= \boxed{x^3-x^2.}$$

(b) Résoudre l'équation $f(x)=0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x-2+2)=0$
$$\Leftrightarrow (x+2)^3-(x+2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2\left[(x+2)-1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=-1$$

L'équation a deux solutions : $\boxed{-1 \text{ et } -2}$.

Question 3. Résoudre le système $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3. \end{cases}$

D'après le cours, ce système a une unique solution :

$$(x,y)=\left(\frac{7+3}{2},\frac{7-3}{2}\right)=\boxed{(5,2).}$$

Question 4. Résoudre le système $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$ $(*)$ $\frac{13+5}{2}=9$; $\frac{13-5}{2}=4$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a $(*) \Leftrightarrow x^2 = 9$ et $y^2=4$ (sys. somme-différence)
$\Leftrightarrow x = \pm 3$ et $y = \pm 2$.

Ainsi, le système $(*)$ a quatre solutions :
$\boxed{(-3,-2),\ (-3,2),\ (3,-2) \text{ et } (3,2).}$

Question 5. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(4^n + (-3)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $4^n + (-3)^{n+1} = 4^n\Big(1 - \underbrace{\left(\frac{-3}{4}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\Big)$ (suite géom.)

On a $1 - \left(\frac{-3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Par produit, $\boxed{\text{la suite diverge vers } +\infty.}$

Question 6. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto \ln(x^2+2x) - \ln(x^2+1)$ quand $x \to +\infty$.

Pour $x > 0$ (par exemple), on a
$$\ln(x^2+2x) - \ln(x^2+1) = \ln\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right) = \ln\Big(\underbrace{\frac{1+2x^{-1}}{1+x^{-2}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}\Big)$$

Par continuité, $\boxed{\text{la fonction tend vers } 0.}$

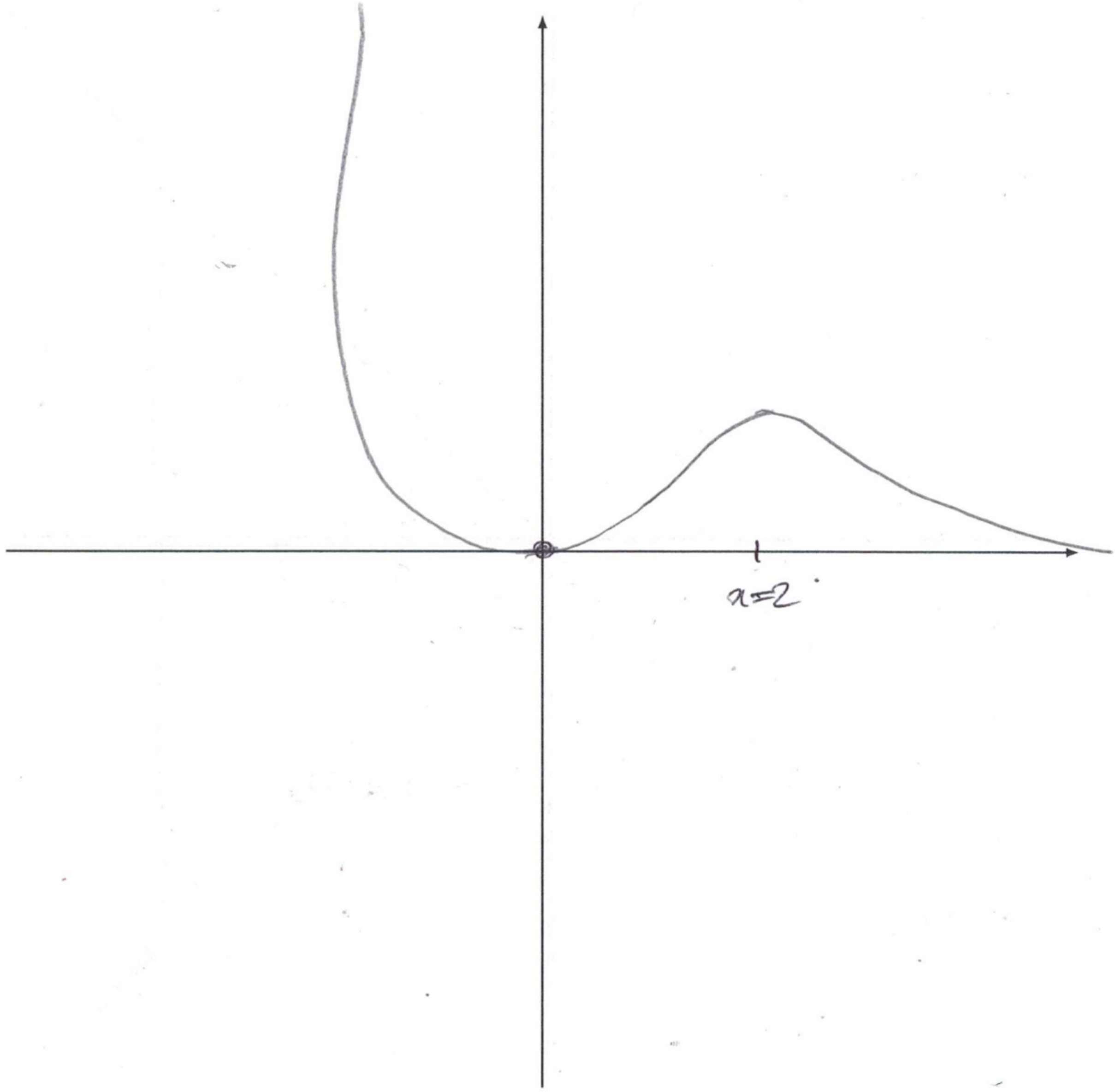
Question 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $1 - 3 + 9 - 27 + 81 + \cdots + (-3)^{n-1} + (-3)^n$.

D'après la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{1 - 3 + 9 + \cdots + (-3)^n = \frac{1 - (-3)^{n+1}}{1-(-3)} = \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^n 3^{n+1}\right)}$$

Question 8. Tracer (de façon à montrer les caractéristiques principales, plus que quelques valeurs exactes) le graphe de la fonction $x \mapsto x^2e^{-x}$.

dérivée : $(2x-x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$.



Question 9. Tracer (de façon à montrer les caractéristiques principales, plus que quelques valeurs exactes) le graphe de la fonction $x \mapsto x \sin(x)$.