Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 03

Question 1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

- $(2+3\mathrm{i})(3-5\mathrm{i}) = (2\times 3 - 3\times(-5)) + i\cdot(2\times(-5)+3\times 3)$
  $= 21 - i.$

- $\dfrac{1}{-\frac{2}{29}-\frac{5}{29}\mathrm{i}} = -29 \times \dfrac{1}{2+5i}$
  $= -29 \times \dfrac{2-5i}{2^2+5^2}$
  $= -2+5i.$

- $\mathrm{i}^{2023} = i^{2020}\cdot i^3$
  $= (i^4)^{505}\cdot(-i)$
  $= 1^{505}\cdot(-i)$
  $= -i.$

- $(1+\mathrm{i})^{20} = \left((1+i)^2\right)^{10}$
  $= (2i)^{10}$
  $= 2^{10}\cdot(i^4)^2\cdot i^2$
  $= -1024.$

- $\dfrac{5+5\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \dfrac{20}{4+3\mathrm{i}} = \dfrac{(5+5i)(3+4i)}{3^2+4^2} + \dfrac{20(4-3i)}{4^2+3^2}$
  $= \dfrac{1}{25}\left[-5+35i+80-60i\right]$
  $= \dfrac{1}{25}\left[75-25i\right] = 3-i.$

Question 2. Résoudre le système somme-produit suivant, d'inconnue (x, y).

$$\begin{cases} x+y = 4-5i \\ xy = -1-7i. \end{cases}$$

On résout d'abord l'équation auxiliaire : $z^2-(4-5i)z+(-1-7i)=0$ (*)

Sa discriminant est $\Delta = (4-5i)^2 + 4\cdot(1+7i) = -5-12i$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a $\qquad (|\Delta| = \sqrt{25+144} = 13)$

$$(a+ib)^2 = \Delta \underset{(\text{cours})}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a^2+b^2 = 13 \\ a^2-b^2 = -5 \\ ab < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \\ ab < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (a, b) = \pm(2, -3).$$

Ainsi, une racine carrée de Δ est $2-3i$, et les solutions de (*) sont

$$\frac{(4-5i)\pm(2-3i)}{2}, \text{ càd } 3-4i \text{ et } 1-i.$$

<u>In fine</u>, les solutions du système somme-produit sont

$$(3-4i, 1-i) \text{ et } (1-i, 3-4i).$$