Interrogation de calcul 04

Question 1. Résoudre le système somme-produit suivant, d'inconnue (x, y).

$$\begin{cases} x+y = & 5+i \\ xy & = 8+4i. \end{cases} \tag{Σ}$$

On résout l'équation auxiliaire

$(\acute{E})\quad z^2-(5+i)z+(8+4i)=0.$

Son discriminant est

$\Delta = (5+i)^2-4(8+4i) = 24+10i-32-16i = -8-6i,$

de module $2\times|4+3i| = 10.$

Soit $a, b\in\mathbb{R}$. On a

$$(a+ib)^2=\Delta \iff \begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ a^2+b^2=10 \\ ab<0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=9 \\ ab<0 \end{cases} \iff (a,b)=\pm(1,-3),$$

donc les racines carrées de Δ sont $\pm(1-3i)$

Ainsi, les sol. de $(\acute{E})$ sont

$\dfrac{(5+i)\pm(1-3i)}{2}$, càd $3-i$ et $2+2i$.

Les solutions de (Σ) sont donc les couples

$$\boxed{(3-i,\ 2+2i) \text{ et } (2+2i,\ 3-i)}$$

Question 2. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

- $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = j = \boxed{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

- $\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{2e^{-i\pi/3}}{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}\,e^{-i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{\sqrt{2}\,e^{-i\,7\pi/12}}$

car $1-\sqrt{3}i = 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\pi/3}$ et $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

- $e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{5\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{2\pi}{12}}+e^{i\frac{2\pi}{12}}\right)$ (arc moitié)

$= e^{i\pi/4}\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= \boxed{\sqrt{3}\,e^{i\pi/4}}$

Question 3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Linéariser l'expression suivante.

$(\sin t)^4 = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2$ [$\forall a,b \in \mathbb{C}, (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$]

$= \frac{1}{16}\left(e^{i4t}-4e^{i2t}+6-4e^{-i2t}+e^{-i4t}\right)$

$= \boxed{\frac{1}{8}\cos(4t)-\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{3}{8}}$