Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 05

Question 1. Simplifier la somme suivante, où l'on a noté $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$, comme d'habitude.

$$S = 1 + j + j^2 + j^3 + \cdots + j^{2022} + j^{2023}.$$

D'après le cours, $1+j+j^2=0$ (somme des éléments de $\mathbb{U}_3$) donc

$1+j+j^2 = j^3+j^4+j^5 = \cdots = j^{2019}+j^{2020}+j^{2021} = 0.$

Ainsi, $S = j^{2022}+j^{2023} = 1+j = \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right).$

Question 2. Résoudre l'équation $z^6 = 8i$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On a $8i = 8\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, donc <u>une</u> solution de l'éqn est

$$\sqrt[6]{8}\exp\left(i\frac{\pi}{2\times 6}\right) = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{12}\right).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{12}\right)\omega \;\middle|\; \omega\in\mathbb{U}_6\right\}$$

$$= \left\{\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{12}\right), \sqrt{2}\exp\left(i\frac{5\pi}{12}\right), \underbrace{\sqrt{2}\exp\left(i\frac{9\pi}{12}\right)}_{=\sqrt{2}\exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right) = -1+i},\right.$$

$$\left.\sqrt{2}\exp\left(i\frac{13\pi}{12}\right), \sqrt{2}\exp\left(i\frac{17\pi}{12}\right), \underbrace{\sqrt{2}\exp\left(i\frac{21\pi}{12}\right)}_{=\sqrt{2}\exp\left(i\frac{7\pi}{4}\right) = 1-i}\right\}$$

Question 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $e^{i\theta} + e^{i3\theta} = 0$.

On a $e^{i\theta} + e^{i3\theta} = e^{i2\theta}(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) = \underbrace{2e^{i2\theta}}_{\neq 0} \cos(\theta)$

donc $e^{i\theta} + e^{i3\theta} \iff \cos(\theta) = 0 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

- On suppose que θ ne vérifie pas la condition précédente. Simplifier l'expression suivante.

$$\frac{e^{i\theta} - e^{i3\theta}}{e^{i\theta} + e^{i3\theta}} = \frac{e^{i2\theta}\left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)}{e^{i2\theta}\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right)} = \frac{-2i \sin(\theta)}{2\cos(\theta)}$$

$$= -i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$(= -i \tan(\theta)).$$

Question 4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Linéariser l'expression suivante.

$$(\sin t)^3 \cos t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$= -\frac{1}{16i}\left(e^{i3t} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-i3t}\right)\left(e^{it} + e^{-it}\right)$$

$$= -\frac{1}{16i}\left[\begin{array}{l} e^{i4t} - 3e^{i2t} + 3 - e^{-i2t} \\ \quad + e^{i2t} - 3 + 3e^{-i2t} - e^{-i4t} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{16i}\left(e^{i4t} - 2e^{i2t} + 2e^{-i2t} - e^{-i4t}\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\sin(4t) + \frac{1}{4}\sin(2t).$$