Interrogation de calcul 06

Question 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser :

$\cos^2(x)\ \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{1}{4\cdot(-8i)}\left(e^{i2x}+2+e^{-i2x}\right)\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right)$$

$$= \frac{-1}{32i}\left[e^{i5x}-3e^{i3x}+3e^{ix}-e^{-ix} +2e^{i3x}-6e^{ix}+6e^{-ix}-2e^{-i3x} +e^{ix}-3e^{-ix}+3e^{-i3x}-e^{-i5x}\right]$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(e^{i5x}-e^{i3x}-2e^{ix}+2e^{-ix}+e^{-i3x}-e^{-i5x}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\sin(5x)+\frac{1}{16}\sin(3x)+\frac{1}{8}\sin(x)$$

Question 2. On note $\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{9}\right)$.

- Exprimer (sans justification) $\mathbb{U}_9$ en fonction de ω :

  $\mathbb{U}_9 = \{\omega^k \mid k \in [\![0,8]\!]\}$

- Calculer ω^3 et en déduire la valeur de $1+\omega^3+\omega^6$.

  $\omega^3 = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) = j$, donc $1+\omega^3+\omega^6 = 1+j+j^2 = 0$ (somme des racines troisièmes de l'unité)

- En déduire la valeur de $\alpha = \omega+\omega^4+\omega^7$ et $\beta = \omega^2+\omega^5+\omega^8$.

  $\alpha = \omega\cdot(1+\omega^3+\omega^6) = 0$

  $\beta = \omega^2(1+\omega^3+\omega^6) = 0$