Interrogation de calcul 07

Dans toute l'interrogation, n est un entier naturel non nul.

Question 1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2) = 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$

$$= \frac{3n(n+1)}{2} + 2n$$

$$= \frac{n}{2}\left(3(n+1)+4\right) = \frac{n(3n+7)}{2}.$$

Question 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k+2 = \frac{3n(n+1)}{2} + 2$

Question 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k+2} = 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{n+2}$ (n termes)

$$= 3^3 \cdot \frac{3^n - 1}{3-1}$$

$$= \frac{27}{2}(3^n - 1).$$

Question 4. Écrire l'expression suivante comme un coefficient binomial.

$$\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+n)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)} = \frac{(1+n)(2+n)\dots(2n)}{n(n-1)\cdots(n-(n-1))} = \frac{\overbrace{(2n)\cdot(2n-1)\cdots(n+1)}^{n \text{ facteurs}}}{n!}$$

$$= \binom{2n}{n}.$$

Question 5. Soit $q \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \begin{cases} \dfrac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} & \text{si } q^2 \neq 1 \text{ (càd si } q \neq \pm 1) \\ n+1 & \text{si } q = \pm 1. \end{cases}$$

Question 6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 2^k \cdot 3^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{2}{3}\right)^k 1^{n-k}$

$$= \left(1-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{(binôme de Newton)}$$

$$= 3^{-n}.$$

Question 7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5 - \sum_{\ell=4}^{n+2} (\ell-2)^5 = \sum_{k=1}^{n} k^5 - \sum_{k=2}^{n} k^5 \quad \left[\begin{array}{l} k = \ell - 2 \\ \ell = k+2 \end{array}\right]$

$$= 1^5 \quad \text{(Relé Chasles)}$$

$$= 1$$

Question 8. Déterminer le signe de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^k$.

Comme $-2 \neq 1$, $S_n = \dfrac{1-(-2)^{n+1}}{3} = \dfrac{1+2(-2)^n}{3}$.

Ainsi, si n est pair, $S_n > 0$,
si n est impair, $2 \cdot (-2)^n \leq -4$ donc $S_n < 0$.

Question 9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4n} 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\substack{k \in [\![0,4n]\!] \\ k \text{ pair}}} 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{\substack{k \in [\![0,4n]\!] \\ k \text{ impair}}} 2^k \underbrace{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}$

$$= \sum_{\ell=0}^{2n} 2^{2\ell} \cos(\ell\pi)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{2n} (-4)^\ell = \frac{1-(-4)^{2n+1}}{1-(-4)} = \frac{1+4^{2n+1}}{5}.$$