Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 08

Dans toute l'interrogation, n est un entier naturel non nul.

Question 1. Encadrer grossièrement la somme $\sum_{k=0}^{n} k!$.

La somme comporte $n+1$ termes, dont le plus petit est $0! = 1$ et le plus grand. On a donc

$$(n+1)\cdot 1 \leq \sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)\, n!$$

donc $\boxed{n+1 \leq \sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!}$.

Question 2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_k = \sum_{j=k+1}^{2k} \frac{1}{j}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $u_{k+1} - u_k$ et en déduire le sens de variation de la suite u.

$$\boxed{u_{k+1} - u_k} = \sum_{j=k+2}^{2k+2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k+1}^{2k} \frac{1}{j}$$

$$= \left(\cancel{\sum_{j=k+2}^{2k} \frac{1}{j}} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) - \left(\frac{1}{k+1} + \cancel{\sum_{j=k+2}^{2k} \frac{1}{j}}\right)$$

$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{= \frac{2}{2k+2}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}} \left(= \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}\right)$$

> 0 car la fonction inverse décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } u \text{ décroît (strictement)}}$

Question 3. En écrivant $k = k + 1 - 1$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

On a $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{k+1-1}{(k+1)!}}_{= \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = \boxed{1 - \frac{1}{(n+1)!}}$$

Question 4. Calculer la somme suivante. On présentera le résultat sous forme factorisée.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - k + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{4}$$

$$= \frac{n}{12}\left[2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\right]$$

$$= \frac{n}{12}\left[4n^2 + \cancel{6n} + 2 - \cancel{6n} - 6 + 3\right]$$

$$= \frac{n}{12}(4n^2 - 1)$$

$$= \boxed{\frac{n(2n-1)(2n+1)}{12}}$$