Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 09

Question 1. Sans se préoccuper du domaine de définition, donner les dérivées des fonctions :

- $f : x \mapsto \mathrm{ch}(x)$;

$f' : x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

- $f : x \mapsto \mathrm{sh}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x)))$;

$f' : x \mapsto \mathrm{ch}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\, x)) \cdot \mathrm{ch}(\mathrm{sh}\, x) \cdot \mathrm{ch}\, x$

- $f : x \mapsto x^x$;

$f : x \mapsto \exp(x \ln(x))$

donc $f' : x \mapsto \exp(x \ln(x)) \left(\frac{x}{x} + 1 \cdot \ln(x)\right)$

$= (1 + \ln(x)) \cdot x^x$.

- $f : x \mapsto \mathrm{th}(x)^2$. (On exprimera le résultat en fonction de ch et sh).

$f' : x \mapsto 2\,\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}'(x) = 2\,\frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = 2\,\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^3}$.

Question 2. Déterminer les limites suivantes (quand $x \to +\infty$) :

- $f : x \mapsto x^{-2} e^x$;

Par croissances comparées, $\frac{x^2}{\underbrace{e^x}_{>0}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $\frac{e^x}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

- $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} \exp\left(-x^{2/3}\right)$.

Pour tout $x > 0$, $f(x) = \exp\Big(\underbrace{\sqrt{x} - 2\ln(x) - x^{2/3}}_{= h(x)}\Big)$.

Or, $h(x) = x^{2/3}\Big(-1 - \underbrace{2\frac{\ln(x)}{x^{2/3}}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \text{ (cr. comp.)}} + \underbrace{x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}}_{\to 0}\Big) \longrightarrow -\infty$

donc $f(x) \longrightarrow 0$ par composition des limites.