Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 10

Question 1. On considère la fonction $f : \begin{cases}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x^2} \end{cases}$.

► Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$ $= \dfrac{a(x+1)+b(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{(a+b)x+(a-b)}{x^2-1}$
(Le calcul sera utile dans la suite, on le vérifiera avec soin !).

Il serait formidable que l'on puisse avoir $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1 \end{cases}$ (attention au signe !)

C'est un système somme-différence. $\begin{cases} b=1/2 \\ a=-1/2 \end{cases}$ convienment.

Ainsi, $\forall x \in]-1,1[, \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

► En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de la dérivée n-ième $f^{(n)}$.
(Il n'est pas nécessaire d'écrire une récurrence parfaite pour justifier les calculs.)

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x+k}$ est lisse par opérations

$f_k' : x \mapsto -\dfrac{1}{(x+k)^2} = -(x+k)^{-2}$

$f_k'' : x \mapsto 2(x+k)^{-3}$

$f_k''' : x \mapsto -6(x+k)^{-4}$

et $\forall p \in \mathbb{N}^*, f_k^{(p)} : x \mapsto (-1)^p p! (x+k)^{-(p+1)}$.

Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}^*, f^{(p)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^p p!}{2}\left((x+1)^{-(p+1)} - (x-1)^{-(p+1)}\right)$.

Question 2. Calculer les développements limités suivants.

- Un $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{2/3}$.

$$\binom{2/3}{2} = \frac{2/3\cdot(2/3-1)}{2} = \frac{2/3(-1/3)}{2} = -\frac{1}{9}$$

$$\text{et } \binom{2/3}{3} = \frac{2/3\cdot(-1/3)\cdot(-4/3)}{6} = \frac{4}{81}$$

$$\text{donc } (1+x)^{2/3} = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 + o(x^3)$$

- Un $DL_2(0)$ de $x \mapsto \exp(x)\ln(1+x)$.

$o(x^2)$

$$\begin{aligned}\exp(x)\ln(1+x) &= \left(1+x+o(x)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\ &\quad + x^2\\ &= x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

- Un $DL_5(0)$ de $(\mathrm{ch}(x)-1)\sin(x)$.

$o(x^5)$

$$\begin{aligned}(\mathrm{ch}(x)-1)\sin(x) &= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &= \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^5)\\ &\quad + \frac{x^5}{24}\\ &= \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + o(x^5).\end{aligned}$$

Question 3. Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x} - \cos(x) - \ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - \cos x - \ln(1+x) &= \cancel{1} + \cancel{x} + x^2 + o(x^2)\\ &\quad - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\\ &\quad - \left(\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\\ &= 2x^2 + o(x^2)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} 2x^2.\end{aligned}$$