Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (Corrigé)

Interrogation de calcul 11

Question 1. Calculer le $DL_7(0)$ de $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$.

$$x^3 e^{-x^2} = x^3\left(1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4)\right)$$

$$= x^3 - x^5 + \frac{1}{2}x^7 + o(x^7).$$

Question 2. Calculer le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1+\ln(1+x))$.

$$\ln(1+\ln(1+x)) = \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(x + o(x)\right)^2 + o(x^2) \quad \text{car} \begin{cases} \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim x \end{cases}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= x - x^2 + o(x^2)$$

Question 3. Calculer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$.

$$\frac{x}{\sin(x)} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}$$

$$= 1 - \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) + \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4) + \frac{x^4}{36} \quad \text{car} \begin{cases} \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \sim -\frac{x^2}{6}. \end{cases}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4). \quad \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) = \frac{7}{12 \times 30}\right)$$

Question 4.

► Calculer un $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{2+x}{2-x}$.

Soyons intelligents ! Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ on a

$$f(x) = \frac{-(2-x)+4}{2-x} = \frac{4}{2-x} - 1 = \frac{2}{1-\frac{x}{2}} - 1.$$

On a $\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$

donc $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)$

► En déduire un équivalent de $g : x \mapsto \dfrac{2+x}{2-x} - e^x$ au voisinage de 0.

On a $g(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)\right) - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$= \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$ $\qquad \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$

donc $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{12}$