Interrogation de calcul 13

Question 1. Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1$ par $X^2 + X + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 - 3X^3 + 4X^2 \quad -1 & X^2 + X + 1 \\
-(X^4 + X^3 + X^2) \qquad & \hline \\
-4X^3 + 3X^2 \quad -1 & \underbrace{X^2 - 4X + 7}_{\text{quotient}} \\
-(-4X^3 - 4X^2 - 4X) & \\
7X^2 + 4X - 1 & \\
-(7X^2 + 7X + 7) & \\
\underbrace{-3X - 8}_{\text{reste}} &
\end{array}
$$

Question 2. Soit $P = (X+2)^{10} - (X-1)^{10}$.

- Déterminer le degré et le coefficient dominant de P.

On a :

$$(X+2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} X^k = X^{10} + 20X^9 + \dots + 5120X + 1024 \in \mathbb{R}_{10}[X]$$

$$\text{et } (X-1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^{10-k} X^k = X^{10} - 10X^9 + \dots - 10X + 1 \in \mathbb{R}_{10}[X]$$

donc $\underline{P \in \mathbb{R}_{10}[X]}$

En outre :

$$\begin{cases} \mathrm{coeff}_{10}(P) = \mathrm{coeff}_{10}\left((X+2)^{10}\right) - \mathrm{coeff}_{10}\left((X-1)^{10}\right) = 1 - 1 = 0 \\ \mathrm{coeff}_9(P) = \mathrm{coeff}_9\left((X+2)^{10}\right) - \mathrm{coeff}_9\left((X-1)^{10}\right) = 20 - (-10) = 30 \end{cases}$$

donc $\boxed{\deg P = 9 \text{ et son coeff. dominant est } 30.}$

▸ Déterminer son coefficient constant (c'est-à-dire de degré 0).

$$\text{coeff}_0(P) = P(0) = (0+2)^{10} - (0-1)^{10}$$
$$= 2^{10} - 1$$
$$= 1023.$$

Question 3. Le polynôme $P = X^6 - 6X^5 + 32X^3$ vérifie $P(-2) = 0$ (on ne demande pas de le vérifier). Déterminer toutes ses racines.

On écrit déjà $P = X^3(\underbrace{X^3 - 6X^2 + 32}_{Q})$.

Utilisons (par ex.) le schéma de Horner pour calculer $Q(-2)$ et factoriser Q par $(X+2)$:

$$\begin{array}{ccccccc} (0) & & -2 & & 16 & & -32 \\ \downarrow +1 & \nearrow \times(-2) & \downarrow -6 & \nearrow \times(-2) & \downarrow +0 & \nearrow \times(-2) & \downarrow +32 \\ 1 & & -8 & & 16 & & \boxed{0 = Q(-2)} \end{array}$$

$$Q = (X+2)(X^2 - 8X + 16)$$
$$= (X+2)(X-4)^2$$

Ainsi, $P = X^3(X+2)(X-4)^2$,

ce qui montre que $\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont } 0, -2 \text{ et } 4.}$

Question 4.

▸ Calculer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \binom{-1/2}{2}(-x^2)^2 \underset{x\to 0}{+o}(x^4)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 \underset{x\to 0}{+o}(x^4)$$

$$\left(\text{car } \binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} = \frac{3}{8}\right)$$

▸ En déduire le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \arcsin(x)$.

$\arcsin(0) = 0$ et arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Par primitivation des DL : $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^5 \underset{x\to 0}{+o}(x^5)$

Question 5. Calculer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1+x}{1+2x}$.

$$\frac{1+x}{1+2x} = (1+x)\left(1 - 2x + (2x)^2 - (2x)^3 + o(x^3)\right)$$

$$= 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + o(x^3)$$
$$+ x - 2x^2 + 4x^3$$

$$= 1 - x + 2x^2 - 4x^3 + o(x^3).$$