Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (Corrigé)

Interrogation de calcul 14

Question 1.

- Calculer le $DL_7(0)$ de $\frac{3x}{3+x^2}$. $= f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{1+\frac{x^2}{3}} = x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + o(x^6)\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^6}{27} + o(x^6)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} - \frac{x^7}{27} + o(x^7).$$

- En déduire un équivalent de $x \mapsto \frac{3x}{3+x^2} - \arctan(x)$ au voisinage de 0.

$$f(x) - \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} + o(x^5)$$

$$- \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)$$

$\frac{1}{9} - \frac{1}{5} = \frac{5-9}{45} = -\frac{4}{45}$

$$= -\frac{4}{45} x^5 + o(x^5)$$

donc $f(x) - \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4}{45} x^5$

Question 2. Soit $P = X^3 - 9X + 7$.

► Montrer que les racines complexes de P sont simples.

$P' = 3X^2 - 9 = 3(X^2-3)$ possède pour racines $\pm\sqrt{3}$.
Or, $P(\sqrt{3}) = 7 - 6\sqrt{3} \neq 0$ et $P(-\sqrt{3}) = 7 + 6\sqrt{3} \neq 0$.

Ainsi, P et P' n'ont pas de racines en commun, donc P n'a pas de racines multiple.

► Justifier rapidement (mais sans utiliser de théorème non encore vu en cours) que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$.

(Vu en TD :) d'après le TVI, tout polynôme de degré 3 possède au moins une racine réelle t_0 (ici, $P(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \pm\infty$), donc on peut trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tq
$P = (X - t_0) Q$.
La résolution des équations du second degré montre que tout polynôme de degré 2 unitaire est scindé sur $\mathbb{C}$: on peut trouver $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $Q = (X - z_1)(X - z_2)$
Ainsi $P = (X - t_0)(X - z_1)(X - z_2)$.

► On note r_1, r_2, r_3 les trois racines complexes de P $= (X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)$
$= X^3 - (r_1+r_2+r_3)X^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)X - r_1r_2r_3$

- Combien vaut $r_1r_2r_3$?

D'après les relations coefficients-racines,
$r_1r_2r_3 = (-1)^3 \operatorname{coeff}_0(P) = -7$

- Combien vaut $r_1 + r_2 + r_3$?

$r_1 + r_2 + r_3 = -\operatorname{coeff}_2(P) = 0$.

- Combien vaut $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$?

Le développement du produit $P = (X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)$ montre que
$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \operatorname{coeff}_1(P) = -9$

- Combien vaut $r_1^2 + r_2^2 + r_3^3$?

On a $0^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2$

$= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\underbrace{(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)}_{=-9}$

donc $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 18$.

Question 3. Calculer les produits matriciels suivants :

▸ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

▸ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

produit de matrices triangulaires

▸ ($E_{i,j}$ désignent les matrices élémentaires habituelles, ici dans $M_2(K)$)

- $E_{1,2}E_{2,1}E_{2,2}E_{2,1}E_{1,1} = 0$!
- $E_{1,2}E_{2,1}E_{1,2}E_{2,1}E_{1,1} = E_{11}$
- $(E_{1,2} + E_{2,2})(E_{2,1} + E_{1,1}) = E_{12}E_{21} + \cancel{E_{12}E_{11}} + E_{22}E_{21} + \cancel{E_{22}E_{11}}$

$= E_{11} + E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.