Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (Corrigé)

Interrogation de calcul 15

Question 1. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\exp(\sin(x) + x^2) = f(x)$.

On a
$$f(x) = \exp\left(x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$
$$= 1 + \left(x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x + x^2 + o(x^2)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + o(x)\right)^3 + o(x^3)$$

car
$$\begin{cases} e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3) \\ x + x^2 - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x \end{cases}$$

$$= 1 + x + x^2 - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot x^3 + \cancel{\frac{1}{6}x^3}$$

$$\boxed{= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + o(x^3).}$$

Question 2. Indiquer si les matrices suivantes sont inversibles. Si c'est le cas, calculer leur inverse.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\det A = 3\times 1 - 1\times 1 = 2 \neq 0$, donc A est inversible

et $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.}$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule avec des « bimatrices »

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) [L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2]$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) [L_3 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_3]$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{bmatrix}$$

donc B est inversible et $\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.}$

Question 3. Résoudre le système linéaire (S) $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ -2x - y + 3z = -10 \\ -x + y + 12z = -2, \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On a $(S) \iff \begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ \quad y + 7z = 2 \\ \quad 2y + 14z = 4 \end{cases} \begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{bmatrix}$

$\iff \begin{cases} x \quad - 5z = 4 \\ \quad y + 7z = 2 \\ \quad 0 = 0 \end{cases} \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{bmatrix}$.

donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 + 5z \\ 2 - 7z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}}$$

(la droite passant par $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$).