Interrogation de calcul 16

Question 1.

► Calculer le $DL_4(0)$ de $\ln(1+\mathrm{sh}(x)^2)$.

$\mathrm{sh}(x)^2 = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

donc $\ln(1+\mathrm{sh}(x)^2) = \ln\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)$

$= \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)$

car $\begin{cases} \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \\ x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim x^2 \end{cases}$

$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\right)$

$= x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4).$

► En déduire un équivalent de $\ln\left(\frac{1+\mathrm{sh}(x)^2}{1+\sin(x)^2}\right)$ quand $x \mapsto 0$.

Le même calcul donne $\sin(x)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

puis $\ln(1+\sin(x)^2) = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)$

$\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}\right)$

$= x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$

Ainsi, $\ln\left(\frac{1+\mathrm{sh}(x)^2}{1+\sin(x)^2}\right) = \ln(1+\mathrm{sh}(x)^2) - \ln(1+\sin(x)^2)$

$= \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)\right)$

$\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

$\sim \frac{2}{3}x^4.$

Question 2.

▶ Déterminer la division euclidienne de $X^5 + X - 1$ par $X^2 + X + 1$.

$$
\begin{array}{rr|l}
X^5 \qquad\qquad +X-1 & & X^2+X+1 \\
\cline{3-3}
-(X^5+X^4+X^3) \qquad\qquad & & X^3-X^2+1 \\
\cline{1-1}
-X^4-X^3 \quad +X-1 & & \\
-(-X^4-X^3-X^2) \qquad & & \\
\cline{1-1}
X^2+X-1 & & \\
-(X^2+X+1) & & \\
\cline{1-1}
-2 & &
\end{array}
$$

donc $X^5+X-1=(X^2+X+1)(X^3-X^2+1)-2$.

▶ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible, et déterminer son inverse.

On pourra « évaluer » en A l'égalité entre polynômes obtenue à la question 1, sans se poser de questions (à part celle de savoir quoi faire des coefficients constants)...

La relation précédente donne

$$\underbrace{A^5+A-I_n}_{=0} = (A^2+A+I_n)(A^3-A^2+I_n)-2I_n$$

donc $(A^2+A+I_n)(A^3-A^2+I_n) = 2I_n$

donc, en posant $B=\frac{1}{2}(A^3-A^2+I_n)$, on a

$(A^2+A+I_n)B = I_n$, ce qui montre $\begin{cases} A^2+A+I_n \in GL_n(\mathbb{R}) \\ (A^2+A+I_n)^{-1} = B. \end{cases}$

Question 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}+u_{n+1}-6u_n = 0$.

► Donner une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

le polynôme caractéristique de la relation de récurrence est

$$X^2+X-6 = (X+3)(X-2),$$

donc on peut trouver $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tq $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \lambda(-3)^n+\mu 2^n$.

En particulier, $\begin{cases} u_0 = 3 = \lambda+\mu \\ u_1 = 1 = -3\lambda+2\mu \end{cases}$ càd $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}_{\det = 5\neq 0}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (-3)^n + 2\cdot 2^n$

$= (-3)^n + 2^{n+1}$!

► Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, sans tendre vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Déjà, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n = (-3)^n\left(1+2\cdot\frac{2^n}{(-3)^n}\right)$$

$$= (-3)^n\left(1+2\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right).$$

Cette égalité montre que $\frac{u_n}{(-3)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

On en déduit $\frac{|u_n|}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. En particulier, elle diverge.

Par ailleurs, $1+2\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc cette quantité est >0 àpcr.
On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est du signe de $(-3)^n$ àpcr.
En particulier, elle n'est pas de signe constant àpcr, et ne peut donc pas tendre vers $\pm\infty$.