Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 17

Question 1. Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}} = f(x)$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{6} = -\frac{5}{16}$$

donc $f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)\right)$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Question 2. On admet que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (équivalent de Stirling).

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Par continuité du logarithme en 1,

$$\ln\left[\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\; n^n\, e^{-n}}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

càd $\ln(n!) - \ln(\sqrt{2\pi n}) - \ln(n^n) - \ln(e^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

càd $\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + o(1)$

$= n\ln(n) + o(n\ln(n))$

donc $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

Question 3.

► Déterminer un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une expression de la forme $\frac{1}{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{car } \frac{1}{1+u} = 1-u+o(u)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

► En déduire un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\left(\exp\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{car } \begin{cases} e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2) \\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}. \end{cases}$$

$$= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

► En déduire un équivalent simple de la suite $\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)-\exp\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right)-\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \left[1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\exp\left(\frac{1}{n}\right)-\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n^2}$.