Interrogation de calcul 17

Question 1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$.

Question 2. On admet que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (équivalent de Stirling).

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Question 3.

- Déterminer un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une expression de la forme $\frac{1}{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- En déduire un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\left(\exp\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

- En déduire un équivalent simple de la suite $\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.