Interrogation de calcul 18

Question 1. Donner des équivalents simples, et la limite, des suites suivantes.

► $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

car $\ln(1+x) \sim x$

donc $\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{1}{n}}.}$

On en déduit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

► $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On a $v_n = \exp\left(n \ln\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right)$

Or : $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$ car $\sin(x) \sim x$

donc $\ln\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \sim \frac{\pi}{n}$ car $\ln(1+x) \sim x$

donc $n \ln\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$

donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\pi}$ par continuité de l'exponentielle.

Comme $e^{\pi} \in \mathbb{R}^*$, cela équivaut à $\boxed{v_n \sim e^{\pi}}$

Question 2. On donne dix bonbons à E, I et M. On ne cherche pas à distinguer les bonbons : seul compte le nombre de bonbons reçus par chacun.

► Combien y a-t-il de répartitions en tout ?

C'est l'astuce "bars and stars" : on compte les anagrammes du «mot» "$\underbrace{**\cdots*}_{10 \text{ étoiles}}||$".

Il y a donc $\binom{12}{2} = \frac{12\times 11}{2} = 66$ répartitions en tout

► Combien y a-t-il de répartitions telles qu'E ne reçoive aucun bonbon ?

Une telle répartition est entièrement déterminée par le nombre n_M de bonbons reçu par M (entre 0 et 10) : E recevra alors 0 bonbon, et I en recevra $10-n_M$.

Par principe de bijection, il y a $|[\![0,10]\!]| = 11$ telles répartitions.

► Combien y a-t-il de répartitions telles qu'au moins un des participants reçoive au plus deux bonbons ?

Le contraire est une répartition où tout le monde reçoit au moins trois bonbons, càd une répartition $3+3+4$.

Il y a 3 telles répartitions, correspondant au choix du chanceux recevant 4 bonbons.

Par principe de soustraction, le nombre de répartitions cherché est $66-3 = 63$ répartitions.