Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 19

Question 1.

- Vous savez qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs strictement positives vérifie $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$.
  Qu'en déduisez-vous sur la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\ln(u_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (continuité de ln)

donc $\ln(u_n) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

- Même question avec une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \text{ch}(n)$.

On a $\text{ch}(n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$

donc $\ln(v_n) = \ln(\text{ch}(n)) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$
$= \ln(e^n/2) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$
$= n - \ln(2) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

  - A-t-on $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$? Justifier.

On a $\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} y_n$.

  - A-t-on $\ln(x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(y_n)$? Justifier.

On a $\ln(y_n) = n\ln(2) - \frac{1}{2}\underbrace{\ln(n+1)}_{=o(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(2)$ (croiss. comp.)

et $\ln(x_n) = n\ln(2)$

donc $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(y_n)$.

Question 2.

$\dfrac{(1/3)(-2/3)}{2} = -\dfrac{1}{9}$

► Calculer le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt[3]{1+3x}$.

$$\sqrt[3]{1+3x} = (1+3x)^{1/3}$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(3x) - \frac{1}{9}(3x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

$$= 1 + x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

► En déduire un équivalent de $\left(\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

La question précédente donne par troncature :

$$\sqrt[3]{1+3x} - 1 = x + \underset{x\to 0}{o}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad (*)$$

donc $\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}} - 1\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ d'après } (*)}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Question 3.

► Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ a-t-on $x^2 \ln(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^\alpha)$?

Pour tout $x > 0$, $\frac{x^2 \ln(x)}{x^\alpha} = x^{2-\alpha} \underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow[x \to +0]{} -\infty}$.

Or, $x^{2-\alpha} \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 2 \\ 1 & \text{si } \alpha = 2 \\ 0 & \text{si } \alpha < 2 \end{cases}$ et, dans ce cas, on a $x^{2-\alpha} \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées.

In fine, $x^2 \ln(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^\alpha)$ ssi $\alpha < 2$.

► En déduire que la fonction $x \mapsto x^2 \ln(x)$ se prolonge en une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable en 0. On précisera les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

D'après la question précédente, $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

vérifie $f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x)$.

La fonction f admet donc un $DL_1(0)$, càd qu'elle est dérivable en 0.

On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, d'après le DL.

► La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Pour $x > 0$, le calcul donne

$$f'(x) = \underbrace{2x \ln(x)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} + x \quad \text{(croissances comparées)}$$

donc $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0 = f'(0)$, et f' est continue en 0.