Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (corrigé)

Interrogation de calcul 20

Question 1. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $x \mapsto \underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3}}_{f(x)}$.

On a $f(x) = \exp\Big(\underbrace{x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}_{\varphi(x)}\Big)$

Or, $\varphi(x) = x^3\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$ car $\begin{cases} \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_{u\to 0}(u^2) \\ \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

$= x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$= x + o(1)$ par troncature.

Donc $f(x) = e^{\varphi(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.

(Rappel : si $\varphi(x) = \psi(x) + o(1)$, alors $\varphi(x) - \psi(x) \longrightarrow 0$

donc $\exp(\varphi(x) - \psi(x)) \longrightarrow 1$

donc $\dfrac{e^{\varphi(x)}}{e^{\psi(x)}} \longrightarrow 1$

càd $e^{\varphi(x)} \sim e^{\psi(x)}$)

Question 2. Dire si les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont libres. Si elles sont liées, on donnera une relation de liaison non triviale.

- $\mathcal{F} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=u_3} \right)$.

Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Cela donne les équations $\begin{cases} 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (1) \\ \lambda + 2\mu + \nu = 0 & (2) \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (3) \end{cases}$

La somme des trois équations donne $4\lambda + 4\mu + 4\nu = 0$,
d'où $\lambda + \mu + \nu = 0$ $(*)$

En soustrayant $(*)$ à (1), (2) et (3), on obtient $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

- $\mathcal{G} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=v_3} \right)$.

On a $v_1 + v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\mathcal{G}$ est liée.

Question 3.

- Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Il s'agit d'une famille échelonnée au sens fort, ce qui conclut.

- Déterminer les coordonnées de $X+1$ dans la base $\mathcal{B}$.

$X+1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X(X-1) + 0 \cdot X(X-1)(X-2)$

donc $[X+1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les coordonnées de $X^3 + X^2$ dans la base $\mathcal{B}$.

$X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$; $X(X-1) = X^2 - X$

donc $X^3 + X^2 = \underbrace{1 \cdot (X^3 - 3X^2 + 2X) + 4 \cdot (X^2 - X)}_{= X^3 + X^2 - 2X} + 2 \cdot X + 0 \cdot 1$

donc $[X^3 + X^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer $\mathrm{Vect}(X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On peut trouver $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tq
$P = \alpha + \beta X + \gamma X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2)$.
En évaluant en 0, il vient $\alpha = P(0)$.

Ainsi, si $P(0) = 0$ alors $P = \beta X + \gamma X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2)$
$\in \mathrm{Vect}(X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$.

Réciproquement, tout élément de $\mathrm{Vect}(X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ s'écrit $\beta X + \gamma X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2)$ et possède donc 0 comme racine.

In fine, $\mathrm{Vect}(X, X(X-1), X(X-1)(X-2)) = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$.