Interrogation de calcul 20

Question 1. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3}$.

Question 2. Dire si les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont libres. Si elles sont liées, on donnera une relation de liaison non triviale.

- $\mathcal{F} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=u_3} \right).$

- $\mathcal{G} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=v_3} \right).$

Question 3.

- Montrer que $\mathcal{B} = \big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

- Déterminer les coordonnées de $X+1$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Déterminer les coordonnées de $X^3 + X^2$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Déterminer $\mathrm{Vect}\big(X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$.