Lycée Henri-IV (PCSI) **NOM :** ....

Interrogation de calcul 21

Dans les questions d'algèbre linéaire, il n'est pas interdit d'utiliser les résultats sur la dimension pour alléger les calculs !

Question 1. Trouver une matrice $M \in M_2(K)$ telle que la famille $\mathcal{B}_M = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{=A}, M \right)$ soit une base de $M_2(K)$.

On prend par exemple $M = E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sous-famille de la base canonique, (E_{11}, E_{12}, E_{21}) est libre.

Clairement, $A \notin \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

D'après le lemme de préajoutation, $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, A)$ est libre.

En permutant les éléments, on en déduit que $\boxed{\mathcal{B}_{E_{11}} \text{ est libre}}$

Comme elle possède $4 = \dim M_2(K)$ vecteurs, il s'agit donc d'une base de $M_2(K)$.

Question 2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X^3, X^3+1, X^3+X, X^3+X^2)$ est une base de $K_3[X]$.

· Déjà, tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ appartiennent à $K_3[X]$,
donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \subseteq K_3[X]$ par stabilité par CL

· Réciproquement,
$$\begin{aligned} 1 &= (X^3+1) - X^3 && \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \\ X &= (X^3+X) - X^3 && \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \\ X^2 &= (X^3+X^2) - X^3 && \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \\ X^3 &= X^3 && \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

donc $K_3[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3) \subseteq \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

Cela montre $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = K_3[X]$, càd que <u>$\mathcal{B}$ engendre $K_3[X]$</u>

· Comme $\mathcal{B}$ possède $4 = \dim K_3[X]$ vecteurs, c'est même une <u>base de $K_3[X]$</u>.

Question 3. Calculer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \overbrace{\arctan\left(\frac{x}{1+2x}\right)}^{f(x)}$.

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)$$

donc $$\frac{x}{1+2x} = x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)$$

Ainsi,

$$f(x) = \left(x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{3}\left(x + o(x)\right)^3 + o(x^3)$$

car $\begin{cases} \arctan u = u - u^3/3 + o(u^3) \\ x + o(x) \sim x \end{cases}$

$$= x - 2x^2 + \frac{11}{3}x^3 + o(x^3)$$

$4 - \frac{1}{3} = \frac{12-1}{3} = \frac{11}{3}$