Lycée Henri-IV (PCSI) NOM : (Corrigé)

Interrogation de calcul 22

Question 1. Avec les notations du cours, rappeler sans justification la formule reliant les matrices ${}_{\mathcal{B}}[x]$, ${}_{\mathcal{B}'}[x]$ et $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

${}_{B'}[x] = P_{B\to B'}^{-1}\ {}_{B}[x].$

Question 2. On considère :

- un K-espace vectoriel E de dimension 2, muni d'une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$;
- un K-espace vectoriel F de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$;
- une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que la matrice $A = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ soit $\begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \end{array}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$

1. Exprimer $f(u_1)$ et $f(u_2)$ en fonction de la base $\mathcal{C}$.

$f(u_1) = 2\,v_1 + 3\,v_2$

$f(u_2) = v_1 - v_2 + 2\,v_3.$

2. On considère $u_1' = u_1$ et $u_2' = u_1 + u_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1', u_2')$ est une base de E et calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et son inverse.

${}_{B}[B'] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car de déterminant 1, donc B' est une base de E, et $P_{B\to B'} = {}_{B}[B']$.

Par inversion des matrices 2×2, $P_{B\to B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On considère $v'_1 = v_2 + v_3$, $v'_2 = v_1 + v_3$ et $v'_3 = v_1 + v_2$. Montrer que $\mathcal{C}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ est une base de F et calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$ et son inverse.

On suit le même raisonnement : soit $M = {}_{\mathcal{C}}[\mathcal{C}']$: on a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On va montrer que M est inversible, ce qui montrera que $\mathcal{C}'$ est une base de F et l'on aura $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} = M$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad [L_1 \leftrightarrow L_2]$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad [L_3 \leftarrow L_3 - L_1]$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} [L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \\ \text{puis} \\ [L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3] \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \quad \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{bmatrix}$$

donc $P^{-1}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calculer la matrice ${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$.

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} &= P^{-1}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} \; {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \; P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{{}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}$$

Question 3. Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos x + 2\sin x)$.

$\ln(\cos x + 2\sin x)$

$= \ln\left(1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$

$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$

$- \frac{1}{2}\left(2x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2x + o(x)\right)^3 + o(x^3)$

car $\begin{cases} \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) \\ 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = O(x) \end{cases}$

$= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$- 2x^2 + x^3$

$+ \frac{8}{3}x^3$

$\boxed{= 2x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{10}{3}x^3 + o(x^3)}$