Première composition de mathématiques [corrigé]

Exercice.

On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \frac{1}{n}\left(-1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n\, n^2\right).$$

1. Recopier sur votre copie et compléter (sans démonstration, mais sans erreur) le tableau des premières valeurs de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

n	1	2	3	4	5	6
T_n	-1	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{7}{2}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(n+1)\,T_{n+1}$ en fonction de $n\,T_n$.

On a $n\,T_n = -1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n\, n^2$*, donc*

$$(n+1)\,T_{n+1} = -1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n\, n^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = n\,T_n + (-1)^{n+1}\,(n+1)^2.$$

3. Conjecturer une expression simple pour la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et la montrer par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on note* $P(n)$ *l'assertion* $T_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{2}$.
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ *par récurrence.*

Initialisation. *On a* $(-1)^1 \dfrac{1+1}{2} = -1 = T_1$*, d'où* $P(1)$.

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$*. Montrons* $P(n+1)$*. On a*

$$\begin{aligned}
(n+1)\,T_{n+1} &= n\,T_n + (-1)^{n+1}\,(n+1)^2 && \textit{(ques. préc.)}\\
&= n\,(-1)^n\,\frac{n+1}{2} + (-1)^{n+1}\,(n+1)^2 && \textit{(d'après } P(n)\textit{)}\\
\textit{donc} \qquad T_{n+1} &= (-1)^n\,\frac{n}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)\\
&= (-1)^n\left[\frac{n}{2} - (n+1)\right]\\
&= (-1)^n\left(-\frac{n+2}{2}\right) = (-1)^{n+1}\,\frac{n+2}{2},
\end{aligned}$$

ce qui montre $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

Problème. Une équation fonctionnelle.

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\big(f(x)\, f(y)\big) + f(x+y) = f(xy). \qquad (\bowtie)$$

Partie I. Préliminaires sur les fonctions injectives.

Une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *injective* si elle vérifie l'assertion

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, h(u) = h(v) \Rightarrow u = v.$$

1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « h n'est pas injective. »

   En passant à la négation, on obtient l'assertion

   $$\exists u, v \in \mathbb{R} : h(u) = h(v) \textit{ et } u \neq v.$$

2. Donner (avec démonstration), un exemple de fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas injective.

   Considérons la fonction constante $h : x \mapsto 0$.
   Les réels $u = 0$ *et* $v = 1$ *vérifient bien* $h(u) = h(v) = 0$ *et* $u \neq v$, *donc* h *n'est pas injective.*

3. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.

   Soit $u, v \in \mathbb{R}$ *tels que* $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(v)$, *c'est-à-dire* $g\big(f(u)\big) = g\big(f(v)\big)$.

   - *Par injectivité de* g *(appliquée aux réels* $f(u)$ *et* $f(v)$*), on obtient* $f(u) = f(v)$.
   - *Par injectivité de* f *(appliquée aux réels* u *et* v*), on obtient* $u = v$.

Partie II. Premier contact.

Dans toute cette partie, on considère une fonction f vérifiant $(\bowtie)$.

4. Montrer que le nombre $z = f(0)^2$ est un *zéro* de la fonction f, c'est-à-dire que $f(z) = 0$.

   En appliquant $(\bowtie)$ *aux réels* $x = y = 0$, *on obtient*

   $$f\big(f(0)^2\big) + f(0) = f(0) \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad f(z) = 0.$$

5. Montrer que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle, c'est-à-dire que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$.

   Supposons $f(0) = 0$. *Soit* $t \in \mathbb{R}$.
   En appliquant $(\bowtie)$ *aux réels* $x = t$ *et* $y = 0$, *on obtient*

   $$\underbrace{f\big(f(t)\, \overbrace{f(0)}^{=0}\big)}_{=f(0)=0} + f(t) = f(0) \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad f(t) = 0.$$

6. Montrer que la fonction opposée $-f$ vérifie également ($\bowtie$).

   Notons $g = -f$. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned} g\big(g(x)\,g(y)\big) + g(x+y) &= -f\big((-f(x))\,(-f(y))\big) - f(x+y) \\ &= -f(f(x)\,f(y)) - f(x+y) \\ &= -f(xy) && \textit{(d'après } (\bowtie)\textit{)} \\ &= g(xy), \end{aligned}$$

   ce qui montre que g *vérifie* ($\bowtie$).

Partie III. Quelques solutions.

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b}$ la fonction $x \mapsto ax + b$.

7. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f_{a,b}\big(f_{a,b}(x)\,f_{a,b}(y)\big) + f_{a,b}(x+y) - f_{a,b}(xy)$.

   On a (en notant $\varphi = f_{a,b}$ *pour simplifier l'écriture, comme suggéré dans l'énoncé) :*

$$\begin{aligned} \varphi(x)\,\varphi(y) &= (ax+b)(ay+b) = a^2\,xy + ab\,x + ab\,y + b^2 \\ \textit{donc} \quad \varphi\big(\varphi(x)\,\varphi(y)\big) &= a^3\,xy + a^2b\,x + a^2b\,y + (ab^2 + b) \\ \textit{et} \quad \varphi(x+y) &= ax + ay + b \\ \textit{et} \quad \varphi(xy) &= a\,xy + b. \end{aligned}$$

   En rassemblant les termes,

$$\varphi\big(\varphi(x)\,\varphi(y)\big) + \varphi(x+y) - \varphi(xy) = \big(a^3 - a\big)\,xy + \big(a^2b + a\big)\,x + \big(a^2b + a\big)\,y + \big(ab^2 + b\big).$$

8. En déduire tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_{a,b}$ vérifie ($\bowtie$).

   On procède par analyse et synthèse.

   Analyse. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $f_{a,b}$ *vérifie* ($\bowtie$).
   D'après le calcul de la question précédente, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \big(a^3 - a\big)\,xy + \big(a^2b + a\big)\,x + \big(a^2b + a\big)\,y + \big(ab^2 + b\big) = 0. \qquad (\triangle)$$

   En appliquant ($\triangle$) *à* $x = y = 0$, *il vient* $ab^2 + b = 0$, *c'est-à-dire* $(ab+1)b = 0$, *c'est-à-dire* $ab + 1 = 0$ *ou* $b = 0$. *On distingue deux cas.*

   Premier cas : $b = 0$. *La relation* ($\triangle$) *se réécrit alors*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \big(a^3 - a\big)\,xy + ax + ay = 0.$$

   En l'appliquant à $x = 0$ *et* $y = 1$, *on obtient* $a = 0$.
   Dans ce cas, on a donc $(a, b) = (0, 0)$.

   Deuxième cas : $ab + 1 = 0$. *La relation* ($\triangle$) *se réécrit alors*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \big(a^3 - a\big)\,xy = 0.$$

   En l'appliquant à $x = y = 1$, *on obtient* $a^3 - a = 0$, *c'est-à-dire* $(a-1)a(a+1) = 0$. *Il y a donc* a priori *trois cas :*

   - $a = 1$, *auquel cas la relation* $ab + 1 = 0$ *entraîne* $b = -1$ *;*
   - $a = 0$, *qui est en fait exclu par la relation* $ab + 1 = 0$ *;*

- $a = -1$, *auquel cas la relation* $ab + 1 = 0$ *entraîne* $b = 1$.

  Dans ce cas, on a donc $(a, b) = (1, -1)$ *ou* $(a, b) = (-1, 1)$.

Tout couple (a, b) *tel que* $\varphi_{a,b}$ *vérifie* ($\bowtie$) *doit donc être égal à* $(1, -1)$, $(0, 0)$, *ou* $(-1, 1)$.

Synthèse. *Un calcul direct montre que si* (a, b) *vaut l'un des trois couples précédents, alors on a* $a^3 - a = a^2b + a = ab^2 + b = 0$. *La formule obtenue à la question précédente montre que dans ce cas,* $f_{a,b}$ *vérifie bel et bien* ($\bowtie$).

In fine, *il y a trois couples* (a, b) *tels que* $f_{a,b}$ *vérifie* ($\bowtie$), *à savoir* $(1, -1)$, $(0, 0)$, *ou* $(-1, 1)$.

Partie IV. Le choc de simplification.

Dans toute cette partie, on considère une fonction f vérifiant ($\bowtie$) et $f(0) > 0$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence $x \neq 1 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x + y = xy$.

   On procède par double implication.

   Sens direct. *Supposons* $x \neq 1$. *Montrons* $\exists y \in \mathbb{R} : x + y = xy$.

   Candidat : $y = \dfrac{x}{x-1}$.

   - *On a bien* $y \in \mathbb{R}$.
   - *On a* $x + y = x + \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x^2 - x + x}{x-1} = x\dfrac{x}{x-1} = xy$.

   Sens réciproque. *On procède par contraposée, en montrant* $x = 1 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq xy$.

   Supposons $x = 1$. *Soit* $y \in \mathbb{R}$.

   On a $x + y = 1 + y \neq y = xy$, *ce qui conclut.*

10. Montrer $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) \neq 0$.

    Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *En utilisant la question précedente, on peut trouver* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $x + y = xy$.
    En appliquant ($\bowtie$) *à* x *et* y, *on obtient*

    $$f\big(f(x)\,f(y)\big) + f(x+y) = f(xy) \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad f\big(f(x)\,f(y)\big) = 0.$$

    Si $f(x)$ *était nul, cette égalité donnerait* $f(0) = 0$, *ce qui est exclu par l'hypothèse* $f(0) > 0$.
    On a donc $f(x) \neq 0$, *ce qui conclut.*

11. En déduire $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$.

    La question 4 montre que $f(z) = 0$, *où l'on rappelle que* $z = f(0)^2$.
    La question précédente montre que l'on ne peut pas avoir $z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Autrement dit, on a* $z = 1$.
    L'égalité $f(z) = 0$ *donne alors immédiatement* $f(1) = 0$, *alors que la définition de* z *montre* $f(0)^2 = 1$.
    Comme on a supposé $f(0) > 0$, *on en déduit* $f(0) = 1$.

12. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) - 1$.

    Soit $x \in \mathbb{R}$. *En appliquant* ($\bowtie$) *à* x *et* 1, *on obtient*

    $$\underbrace{f\big(f(x)\,f(1)\big)}_{=f(0)=1} + f(x+1) = f(x) \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad f(x+1) = f(x) - 1.$$

13. Déterminer la valeur de $f(n)$ pour tout entier relatif n.

    Commençons par montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f(x+k) = f(x) - k$.
    Soit $x \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on note* $P(k)$ *l'assertion* $f(x+k) = f(x) - k$.
    Montrons $\forall k \in \mathbb{N}, P(k)$ *par récurrence.*

Initialisation. *L'assertion* $P(0)$ *est l'égalité évidente* $f(x) = f(x)$.

Hérédité. *Soit* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(k)$. *Montrons* $P(k+1)$. *On a*

$$\begin{aligned} f(x+k+1) &= f(x+k) - 1 && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= f(x) - k - 1 && \textit{(d'après } P(k)\textit{)} \\ &= f(x) - (k+1), \end{aligned}$$

ce qui montre $P(k+1)$ *et clôt la récurrence.*

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z}$. *On distingue deux cas.*

Premier cas. *Si* $n \geqslant 0$, *en appliquant l'assertion que l'on vient de montrer à* $x = 0$ *et* $k = n$, *on obtient* $f(n) = f(0) - n = 1 - n$.

Deuxième cas. *Si* $n \leqslant 0$, *en appliquant l'assertion que l'on vient de montrer à* $x = n$ *et* $k = -n$, *on obtient* $1 = f(0) = f(n) - (-n)$, *c'est-à-dire* $f(n) = 1 - n$.

Dans tous les cas, on a donc $f(n) = 1 - n$.

Partie V. Conclusion dans le cas injectif.

Dans toute cette partie, on considère une fonction f vérifiant ($\bowtie$) et $f(0) > 0$.

14. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f\big(f(x)\big) = 1 - f(x)$ et en déduire $\forall x \in \mathbb{R}, f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x)$.

    Soit $x \in \mathbb{R}$. *En appliquant* ($\bowtie$) *à* x *et* $y = 0$, *on obtient*

    $$f\big(f(x)\underbrace{f(0)}_{=1}\big) + f(x) = f(0) \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad f\big(f(x)\big) = 1 - f(x).$$

    On a donc montré $\forall x \in \mathbb{R}, f\big(f(x)\big) = 1 - f(x)$.
    Soit $x \in \mathbb{R}$. *En appliquant la* $\forall$*-assertion que l'on vient de montrer à* $f(x)$, *puis à* x, *on obtient*

    $$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = 1 - f\big(f(x)\big) = 1 - \big(1 - f(x)\big) = f(x).$$

15. Montrer que si f est une fonction injective, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$.

    Supposons f *injective. Soit* $x \in \mathbb{R}$.
    La question précédente montre $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x)$.
    En appliquant l'injectivité de f *aux réels* $f\big(f(x)\big)$ *et* x, *on obtient* $f\big(f(x)\big) = x$.
    On a ainsi $1 - f(x) = f\big(f(x)\big) = x$, *ce qui montre* $f(x) = 1 - x$.

Partie VI. Une démonstration d'injectivité.

Dans cette partie, on dira qu'un couple $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ est *réalisable* s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s = x + y$ et $p = xy$. On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des couples réalisables.

En symboles, on a donc $\mathscr{R} = \left\{ (x+y, xy) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

16. Montrer que $\mathscr{R} \neq \mathbb{R}^2$.

    Rédaction rapide. *Montrons* $(0, 1) \notin \mathscr{R}$, *ce qui conclura.*
    Supposons par l'absurde $(0, 1) \in \mathscr{R}$. *On peut donc trouver* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x + y = 0$ *et* $xy = 1$.
    Or, comme $x + y = 0$, *on* $xy = -x^2$. *La relation* $xy = 1$ *donne donc* $x^2 = -1$, *ce qui est absurde.*

Rédaction ambitieuse. *Le cours dit que pour tout couple* $(s,p) \in \mathbb{R}^2$*, il existe un couple* $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$ *tel que les seuls couples* $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ *vérifiant* $x+y=s$ *et* $xy=p$ *sont* (z_1,z_2) *et* (z_2,z_1).
En outre, on sait que z_1 *et* z_2 *sont « les » solutions de l'équation* $z^2 - sz + p = 0$ *(en se rappelant qu'il peut n'y avoir qu'une seule solution, que l'on considère comme double).*
In fine, *on voit que le couple* (s,p) *est réalisable si et seulement si les solutions de* $z^2 - sz + p = 0$ *sont réelles, c'est-à-dire si et seulement si le discriminant* $s^2 - 4p$ *est* $\geqslant 0$.
On vérifie alors facilement que $(0,1) \notin \mathscr{R}$.

17. Écrire avec des quantificateurs l'assertion : « pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, le couple $(u+n+1, v+n)$ est réalisable dès que $n \in \mathbb{N}$ est un entier suffisamment grand. »

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, (u+n+1, v+n) \in \mathscr{R}.$$

18. Démontrer l'assertion de la question précédente.

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Pour $n \in \mathbb{N}$*, on sait que* $(u+n+1, v+n)$ *est réalisable si et seulement si* $(u+n+1)^2 - 4(v+n) \geqslant 0$.
Or, après calcul,

$$(u+n+1)^2 - 4(v+n) = n^2 + \underbrace{(2u-2)}_{=:\beta} n + \underbrace{(u+1)^2 - 4v}_{=:\gamma}.$$

Or, la fonction $q : x \mapsto x^2 + \beta x + \gamma$ *est positive sur une certaine demi-droite* $[\rho, +\infty[$. *En effet,*

- *si l'équation* $q(x) = 0$ *a des solutions réelles, on peut considérer la plus grande* $r_{\max}$ *et l'on a* $\forall x \geqslant r_{\max}, q(x) \geqslant 0$*, donc* $\rho = r_{\max}$ *convient ;*
- *si l'équation* $q(x) = 0$ *n'a pas de solutions réelles, on a alors* $\forall x \in \mathbb{R}, q(x) \geqslant 0$ *et* $\rho = 0$ *convient (par exemple).*

En fixant un entier naturel $N \geqslant \rho$*, on a donc en particulier* $\forall n \geqslant N, q(n) \geqslant 0$*, ce qui montre*

$$\forall n \geqslant N, (u+n+1, v+n) \in \mathscr{R},$$

et conclut.

19. En déduire que toute fonction f vérifiant (⋈) et $f(0) > 0$ est injective.

Soit f *une fonction vérifiant* (⋈) *et* $f(0) > 0$.
Soit $u, v \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(u) = f(v)$.
D'après la question précédente, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N, (u+n+1, v+n) \in \mathscr{R}$. *En particulier,* $(u+N+1, v+N) \in \mathscr{R}$ *: on peut donc trouver* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x + y = u + N + 1$ *et* $xy = v + N$.
En appliquant (⋈) *à* x *et* y*, on obtient*

$$f\big(f(x)\,f(y)\big) + f(u+N+1) = f(v+N).$$

D'après le raisonnement mené à la question 13, on a $f(u+N+1) = f(u) - 1 - N$ *et* $f(v+N) = f(v) - N$.
En utilisant le fait que $f(u) = f(v)$*, on obtient en particulier*

$$f\big(f(x)\,f(y)\big) - 1 = 0 \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad f\big(f(x)\,f(y) + 1\big) = 0.$$

La question 10 montre alors que $f(x)\,f(y) + 1 = 1$*, c'est-à-dire* $f(x)\,f(y) = 0$.
On a donc $f(x) = 0$ *ou* $f(y) = 0$.
Les réels x *et* y *jouant des rôles symétriques, on peut supposer* $f(x) = 0$*, c'est-à-dire* $x = 1$.
On a alors $u + N + 1 = x + 1$ *et* $v + N = x$*, ce qui montre* $u = v$*, et conclut.*

Partie VII. Conclusion générale.

20. En utilisant ce qui précède, déterminer complètement les fonctions f vérifiant $(\bowtie)$.

    On procède par analyse et synthèse.

    Analyse. *Soit* f *une fonction vérifiant* $(\bowtie)$*. On distingue trois cas, suivant le signe de* $f(0)$*.*

    - *Si* $f(0) = 0$*, la question 5 montre que* f *est la fonction nulle.*
    - *Si* $f(0) > 0$*, la fonction 19 montre que* f *est injective.*
      La question 15 montre alors que $f : x \mapsto 1 - x$*.*
    - *Si* $f(0) < 0$*, la question 6 montre que* $g = -f$ *vérifie encore* $(\bowtie)$*. Naturellement, on a* $g(0) > 0$*, donc le cas précédent montre que* $g : x \mapsto 1 - x$*. Ainsi,* $f : x \mapsto x - 1$*.*

    Synthèse. *Réciproquement, on a notamment montré à la question 8 que les trois fonctions* $x \mapsto 0$*,* $x \mapsto 1 - x$ *et* $x \mapsto x - 1$ *vérifiaient* $(\bowtie)$*.*

    In fine, *il y a exactement trois fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle* $(\bowtie)$*, à savoir* $x \mapsto 0$*,* $x \mapsto 1-x$ *et* $x \mapsto x - 1$*.*