Deuxième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1. Un peu d'injectivité.

Dans tout l'exercice, E, F et G sont trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

   C'est une question de cours.
   Supposons f *et* g *injectives.*
   Soit $x_1, x_2 \in E$ *tels que* $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. *Autrement dit,* $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$.
   Par injectivité de g, *on en déduit* $f(x_1) = f(x_2)$.
   Par injectivité de f, *on en déduit* $x_1 = x_2$, *ce qui conclut.*

2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

   C'est une question de cours.
   Supposons $g \circ f$ *injective.*
   Soit $x_1, x_2 \in E$ *tels que* $f(x_1) = f(x_2)$.
   En appliquant g, *on obtient* $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$, *c'est-à-dire* $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.
   Par injectivité de $g \circ f$, *on en déduit* $x_1 = x_2$, *ce qui conclut.*

3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et que f est surjective, alors g est injective.

   Supposons $g \circ f$ *injective et* f *surjective.*
   Soit $y_1, y_2 \in F$ *tels que* $g(y_1) = g(y_2)$.
   Par surjectivité de f, *on peut trouver* $x_1, x_2 \in E$ *tels que* $y_1 = f(x_1)$ *et* $y_2 = f(x_2)$.
   On a donc $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$, *c'est-à-dire* $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.
   Par injectivité de $g \circ f$, *on en déduit* $x_1 = x_2$.
   Ainsi, $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, *ce qui conclut.*

4. Les deux applications suivantes sont-elles injectives ?

   (a) $u : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n^2 + n \end{cases}$; (b) $v : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n^2 + n. \end{cases}$

   (a) On a $u(-1) = u(0) = 0$, *donc* u *n'est pas injective.*

   (b) Montrons que v *est injective.*
   Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ *tels que* $v(n_1) = v(n_2)$. *On a donc* $2n_1^2 + n_1 = 2n_2^2 + n_2$. *Ainsi,*

   $$\begin{aligned} 0 &= (2n_1^2 + n_1) - (2n_2^2 + n_2) \\ &= 2 \underbrace{(n_1^2 - n_2^2)}_{=(n_1-n_2)(n_1+n_2)} + (n_1 - n_2) \\ &= (n_1 - n_2)\big[2(n_1 + n_2) + 1\big]. \end{aligned}$$

   Comme l'entier $2(n_1 + n_2) + 1$ *est impair, il n'est pas nul. D'après la règle du produit nul, on en déduit* $n_1 - n_2 = 0$, *c'est-à-dire* $n_1 = n_2$, *ce qui conclut.*

Exercice 2. Une anthologie de calculs.

1. Résoudre le système $\begin{cases} x+y = 2-2i \\ xy = -3+2i \end{cases}$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{C}^2$.

   Pour résoudre le système, introduisons l'équation auxiliaire

   $$z^2 - (2-2i)z + (-3+2i) = 0 \tag{É}$$

   d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   Il s'agit d'une équation du second degré, de discriminant

   $$\Delta = (2-2i)^2 - 4(-3+2i) = 12 - 16i = 4(3-4i).$$

   Cherchons une racine carrée de $3-4i$ *(dont le module vaut* 5*). Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, on a la chaîne d'équivalences*

   $$(a+ib)^2 = 3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 3 \\ a^2+b^2 = 5 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) = \pm(2,-1).$$

   Ainsi, une racine carrée de $3-4i$ *est* $2-i$*, et on a* $\Delta = 4(3-4i) = (4-2i)^2$.
   Les solutions de (É) sont donc $\dfrac{(2-2i) \pm (4-2i)}{2}$*, c'est-à-dire* $3-2i$ *et* -1.
   In fine, *les solutions du système somme-produit sont les couples* $(3-2i,-1)$ *et* $(-1,3-2i)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)\,\sin(x)$.

   On a

   $$\begin{aligned}
   \cos^3(x)\,\sin(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \\
   &= \frac{1}{16i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right) \\
   &= \frac{1}{16i}\left(\begin{array}{ccccccccc} e^{i4x} & + & 3e^{i2x} & + & 3 & + & e^{i2x} & & \\ & - & e^{i2x} & - & 3 & - & 3e^{-i2x} & - & e^{-i4x} \end{array}\right) \\
   &= \frac{1}{16i}\left(e^{i4x}+2e^{i2x}-2e^{-i2x}-e^{-i4x}\right) \\
   &= \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x).
   \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le coefficient binomial $\dbinom{2n}{n}$ est pair.

   On a

   $$\begin{aligned}
   \binom{2n}{n} &= \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1} && \textit{(formule de Pascal)} \\
   &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n-1} && \textit{(symétrie)} \\
   &= 2\binom{2n-1}{n-1},
   \end{aligned}$$

   ce qui montre qu'il s'agit d'un entier pair.

4. Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $n \geqslant 1$.

   (a) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \geqslant \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1-\left(1-2\sin^2(x)\right)}{2} = \sin^2(x).$$

   Or, pour tout $u \in [0,1]$, *on a* $\sqrt{u} \geqslant u$. *En appliquant ce résultat à* $\sin^2(x)$, *on obtient*

$$|\sin(x)| = \sqrt{\sin^2(x)} \geqslant \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta)$.

   On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) &= \text{Ré} \sum_{k=1}^{n} e^{i2k\theta} && \textit{(}\mathbb{R}\textit{-linéarité de } \text{Ré}\textit{)}\\
&= \text{Ré} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i2\theta}\right)^k \\
&= \text{Ré}\left(e^{i2\theta}\frac{\left(e^{i2\theta}\right)^n - 1}{e^{i2\theta}-1}\right) && \textit{(car } 2\theta \in]0,2\pi[\textit{, donc } e^{i2\theta} \neq 1\textit{)}\\
&= \text{Ré}\left(e^{i2\theta}\frac{e^{i2n\theta}-1}{e^{i2\theta}-1}\right)\\
&= \text{Ré}\left(e^{i2\theta}\frac{e^{in\theta}}{e^{i\theta}}\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)\\
&= \text{Ré}\left(e^{i(n+1)\theta}\frac{2i\,\sin(n\theta)}{2i\,\sin(\theta)}\right)\\
&= \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}\,\text{Ré}\, e^{i(n+1)\theta} && \textit{(}\mathbb{R}\textit{-linéarité de } \text{Ré}\textit{)}\\
&= \frac{\sin(n\theta)\,\cos\left((n+1)\theta\right)}{\sin(\theta)}.
\end{aligned}$$

   (c) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\sin(k\theta)| \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2\,\sin(\theta)}$.

   En sommant les inégalités de la première question, appliquée aux différents $k\theta$, *on obtient*

$$\sum_{k=1}^{n} |\sin(k\theta)| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\cos(2k\theta)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta).$$

   Or, d'après la deuxième question,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)\right| &= \left|\frac{\sin(n\theta)\,\cos\left((n+1)\theta\right)}{\sin(\theta)}\right|\\
&= \frac{\left|\sin(n\theta)\right|\,\left|\cos\left((n+1)\theta\right)\right|}{\left|\sin(\theta)\right|}\\
&\leqslant \frac{1}{\left|\sin\theta\right|} && \textit{(produit d'inégalités entre positifs)}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\theta}. \qquad \textit{(car } \theta \in]0,\pi[\textit{)}$$

On en déduit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\theta}$ *et donc* $\displaystyle -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) \geqslant -\frac{1}{2\sin(\theta)}$.
In fine,

$$\sum_{k=1}^{n} |\sin(k\theta)| \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2\sin(\theta)}.$$

Problème. Ensembles réticulés.

Partie I. Premiers exemples.

1. Pour les quatre parties suivantes, déterminer (en justifiant rapidement) si les assertions **(R1)**, **(R2)** et **(R3)** sont vraies.

   (a) $A = \mathbb{Z}$; (b) $A = i\mathbb{R}$; (c) $A = \Delta$.

   (a) **(R1) est vraie.** *Le produit de deux entiers relatifs est bien un entier relatif.*
   (R2) est vraie. *Soit* $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. *On a* $n_1^2 \in \mathbb{N}$ *et* $n_2^2 \in \mathbb{N}$, *donc* $n_1^2 + n_2^2 \in \mathbb{N}$.
   A fortiori, $n_1^2 + n_2^2 \in \mathbb{Z}$.
   (R3) est vraie. *On a* $\mathbb{Z} \cap \Delta = \{-1, 0, 1\}$, *qui est bien un ensemble fini.*
   Cela montre donc que $\mathbb{Z}$ *est un ensemble réticulé (et* $N(\mathbb{Z}) = 3$*).*

   (b) **(R1) est fausse.** *On a* $i \in i\mathbb{R}$ *et* $i \times i = -1 \notin i\mathbb{R}$.
   (R2) est fausse. *On a* $0, i \in i\mathbb{R}$ *et* $0^2 + i^2 = -1 \notin i\mathbb{R}$.
   (R3) est fausse. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *le nombre* $\frac{1}{n}i$ *appartient à* $i\mathbb{R} \cap \Delta$.
   Comme ces nombres complexes sont tous différents, l'intersection $i\mathbb{R} \cap \Delta$ *est bien infinie.*

   (c) **(R1) est vraie.** *Soit* $z_1, z_2 \in \Delta$. *On a* $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \leqslant 1$, *donc* $z_1\, z_2 \in \Delta$.
   (R2) est fausse. *On a* $1 \in \Delta$ *mais* $2 = 1^2 + 1^2 \notin \Delta$.
   (R3) est fausse. *L'intersection* $\Delta \cap \Delta = \Delta$ *est infinie (elle contient par exemple l'intersection de la question précédente).*

2. Donner sans justification :
   (a) un exemple d'ensemble réticulé A **non vide** tel que $N(A) = 0$;
   (b) un exemple d'ensemble réticulé A tel que $N(A) = 1$;
   (c) un exemple d'ensemble réticulé A tel que $N(A) = 2$.

   (a) L'ensemble (non vide) $A =]1, +\infty[$ *vérifie assez clairement **(R1)** et **(R2)**. Par ailleurs,* $A \cap \Delta$ *est vide, ce qui achève la démonstration du fait que* A *est réticulé, et montre* $N(A) = 0$.
   (b) L'ensemble $A = [1, +\infty[$ *vérifie assez clairement **(R1)** et **(R2)**. Par ailleurs,* $A \cap \Delta = \{1\}$ *est fini, ce qui achève la démonstration du fait que* A *est réticulé, et montre* $N(A) = 1$.
   (c) L'ensemble $A = \mathbb{N}$ *vérifie assez clairement **(R1)** et **(R2)**. Par ailleurs,* $A \cap \Delta = \{0, 1\}$ *est fini, ce qui achève la démonstration du fait que* A *est réticulé, et montre* $N(A) = 2$.

3. Dans cette question, on note $q : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \end{cases}$ la fonction « carrée ».

   Soit $L \subseteq \mathbb{C}$ une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant **(R1)** et **(R3)**, et *stable par somme*, c'est-à-dire telle que l'on ait $\forall z_1, z_2 \in L, z_1 + z_2 \in L$.

   (a) Montrer que L est réticulé.

   *Puisque **(R1)** et **(R3)** sont explicitement supposés, il reste à montrer que* L *vérifie **(R2)**.*
   Soit $z_1, z_2 \in L$.
   Par stabilité par produit, $z_1^2 = z_1 z_1$ *et* $z_2^2 \in L$.
   Par stabilité par somme, $z_1^2 + z_2^2 \in L$, *ce qui conclut.*

   (b) Montrer que l'image réciproque $\widehat{L} = q^{-1}[L]$ est également réticulée.

   (R1). *Soit* $z_1, z_2 \in \widehat{L}$. *Ainsi,* z_1^2 *et* z_2^2 *sont des éléments de* L.
   On a $(z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2 \in L$ *(par stabilité par produit de* L*).*
   Cela montre $z_1 z_2 \in \widehat{L}$.

   (R2) *Soit* $z_1, z_2 \in \widehat{L}$.
   On a $z_1^2, z_2^2 \in L$. *Par stabilité par somme,* $z_1^2 + z_2^2 \in L$.
   Par stabilité par produit, $\left(z_1^2 + z_2^2\right)^2 \in L$, *ce qui montre que* $z_1^2 + z_2^2 \in \widehat{L}$.

   (R3). *Notons* $z_1, \ldots, z_n$ *les éléments de* $L \cap \Delta$. *D'après le cours, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *le nombre complexe* z_i *possède deux racines carrées* ξ_i *et* η_i *(éventuellement confondues, si* $z_i = 0$*). Remarquons que* $|\xi_i| = |\eta_i| = \sqrt{|z_i|} \leqslant 1$.

   Montrons $\widehat{L} \cap \Delta = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$ *par double inclusion (on note provisoirement* X *l'ensemble de droite).*

   - *Soit* $\zeta \in \widehat{L} \cap \Delta$. *On a* $\zeta^2 \in L$ *et* $|\zeta^2| = |\zeta|^2 \leqslant 1$, *donc* $\zeta^2 \in L \cap \Delta$. *On peut donc trouver un indice* $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $\zeta^2 = z_i$, *ce qui entraîne* $\zeta = \xi_i$ *ou* $\zeta = \eta_i$.
     Dans les deux cas, $\zeta \in X$.
   - *Réciproquement, soit* $\zeta \in X$. *On peut donc trouver* $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $\zeta = \xi_i$ *ou* $\zeta = \eta_i$.
     - *On a déjà* $\zeta \in \Delta$, *d'après une remarque faite plus haut.*
     - *On a* $\zeta^2 = z_i \in L$, *donc* $\zeta \in \widehat{L}$.

     Cela démontre $\zeta \in \widehat{L} \cap \Delta$, *et conclut.*

4. Soit $n \geqslant 1$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles réticulés.

   Montrer que l'intersection $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ est réticulée.

   Notons $B = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

   (R1). *Soit* $z_1, z_2 \in B$. *Montrons* $z_1 z_2 \in B$, *c'est-à-dire* $\forall i \in [\![1, n]\!], z_1 z_2 \in A_i$.
   Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
   Comme $z_1, z_2 \in B$, *on a* $z_1, z_2 \in A_i$.
   Comme A_i *vérifie **(R1)**, on a* $z_1 z_2 \in A_i$, *ce qui conclut.*

   (R2). *Essentiellement le même raisonnement montre que l'assertion **(R2)** est vraie.*

   (R3). *Comme* $B \subseteq A_1$ *(notons que l'on utilise l'hypothèse* $n \geqslant 1$ *pour parler de* A_1*), on a* $B \cap \Delta \subseteq A_1 \cap \Delta$, *ce qui montre que* $B \cap \Delta$ *est fini.*

Partie II. Quelques résultats utiles.

5. Soit A un ensemble réticulé.

   (a) Montrer que $\forall z \in A, \forall n \in \mathbb{N}^*, z^n \in A$.

   Soit $z \in A$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $P(n)$ *l'assertion* « $z^n \in A$ ». *Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ *par récurrence.*

   Initialisation. *Par hypothèse,* $z \in A$, *ce qui montre* $P(1)$.

   Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$.
   D'après $P(n)$, $z^n \in A$. *Par hypothèse,* $z \in A$.
   Par stabilité par produit, $z^{n+1} = z^n z \in A$, *ce qui montre* $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

   (b) En déduire que A ne contient pas d'élément dont le module appartienne à $]0, 1[$.

   Supposons par l'absurde que A *contienne un élément* z *tel que* $0 < |z| < 1$.
   D'après la question précédente, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est à valeurs dans* A.
   Comme $|z| \in]0, 1[$, *la suite de modules* $(|z^n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante et à valeurs dans l'intervalle* $]0, 1[$. *Ainsi, les éléments de la suite* $(z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont distincts et appartiennent à* Δ.
   Cela démontre que $A \cap \Delta$ *est infini, et contredit l'assertion* ***(R3)***, *ce qui conclut la démonstration.*

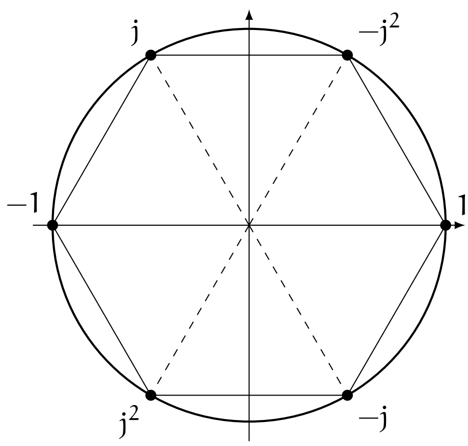
6. Soit A un ensemble réticulé.

   (a) Montrer que si $i \in A$, alors $\{0\} \cup \mathbb{U}_4 \subseteq A$.

   Supposons $i \in A$.
   D'après la question 5a, les puissances $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ *appartiennent à* A.
   D'après ***(R2)***, $0 = 1^2 + i^2 \in A$.
   Cela montre $\{0\} \cup \mathbb{U}_4 \subseteq A$.

   (b) Montrer que si $j \in A$, alors $\mathbb{U}_6 \subseteq A$.

   Supposons $j \in A$.
   D'après la question 5a, les puissances j^2 *et* $j^3 = 1$ *appartiennent à* A.
   D'après ***(R2)***, $j^2 + (j^2)^2 = j^2 + j = -1$ *appartient à* A.
   Par stabilité par produit, $-j$ *et* $-j^2$ *appartiennent à* A.
   Cela montre $\mathbb{U}_6 = \{1, -j^2, j, -1, j^2, -j\} \subseteq A$.



7. Soit A un ensemble réticulé.

   (a) On définit $A^\sharp = A \cup \{0\}$. Montrer que $A^\sharp$ est réticulé.

   (R1). *Soit* $z_1, z_2 \in A^\sharp$.

- *Si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, on a $z_1 z_2 = 0$.*
- *Si $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$, on a $z_1, z_2 \in \mathrm{A}$, donc $z_1 z_2 \in \mathrm{A}$, car A est stable par produit.*

Dans les deux cas, $z_1 z_2 \in \mathrm{A}^\sharp$.

(R2). *Soit $z_1, z_2 \in \mathrm{A}^\sharp$.*

- *Si $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$, on a $z_1^2 + z_2^2 = 0$.*
- *Si $z_1 = 0$ et $z_2 \neq 0$, on a $z_1^2 + z_2^2 = z_2^2$.*
  Comme $z_2 \in \mathrm{A}$ et que A est stable par produit, on a bien $z_2^2 \in \mathrm{A}$.
- *Le cas symétrique $z_1 \neq 0$ et $z_2 = 0$ se traite exactement de la même façon*
- *Si $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$, on a $z_1, z_2 \in \mathrm{A}$, donc $z_1^2 + z_2^2 \in \mathrm{A}$.*

Dans tous les cas, $z_1^2 + z_2^2 \in \mathrm{A}^\sharp$.

(R3). *L'ensemble $\mathrm{A}^\sharp \cap \Delta$ possède au plus un élément de plus que $\mathrm{A} \cap \Delta$, ce qui montre que cette intersection est finie.*

Ainsi, $\mathrm{A}^\sharp$ est réticulé.

(b) On définit $\mathrm{A}^\flat = \mathrm{A} \setminus \{0\}$.
Montrer que $\mathrm{A}^\flat$ est réticulé si et seulement si $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{A}^\flat, \dfrac{z_1}{z_2} \notin \{-i, i\}$.

Sens direct, par contraposée. *Supposons pouvoir trouver $z_1, z_2 \in \mathrm{A}^\flat$ tel que $\dfrac{z_1}{z_2} = \pm i$.*

On a donc $\dfrac{z_1^2}{z_2^2} = -1$, donc $z_1^2 + z_2^2 = 0 \notin \mathrm{A}^\flat$.

*Ainsi, l'ensemble $\mathrm{A}^\flat$ ne vérifie pas **(R2)**, et il n'est donc pas réticulé.*

Sens réciproque. *Supposons $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{A}^\flat, \dfrac{z_1}{z_2} \notin \{-i, i\}$. Montrons $\mathrm{A}^\flat$ réticulé.*

(R1). *Soit $z_1, z_2 \in \mathrm{A}^\flat$.*

- *Comme A vérifie **(R1)**, on a $z_1 z_2 \in \mathrm{A}$.*
- *D'après la règle du produit nul, les facteurs étant eux-mêmes non nuls, on a $z_1 z_2 \neq 0$.*

Ainsi, $z_1 z_2 \in \mathrm{A}^\flat$.

(R2). *Soit $z_1, z_2 \in \mathrm{A}^\flat$.*

- *Comme A vérifie **(R2)**, on a $z_1^2 + z_2^2 \in \mathrm{A}$.*
- *Il reste à montrer $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas.*
  On a donc $z_1^2 + z_2^2 = 0$, d'où il vient (en utilisant $z_2 \neq 0$), $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 = -1$, et donc $\dfrac{z_1}{z_2} = \pm i$, ce qui contredit l'hypothèse.
  *Ainsi, $\mathrm{A}^\flat$ vérifie **(R2)**.*

(R3). *L'ensemble $\mathrm{A}^\flat \cap \Delta$ étant inclus dans $\mathrm{A} \cap \Delta$, il est fini.*

Ainsi, $\mathrm{A}^\flat$ est réticulé.

8. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que n est un multiple de 3 si et seulement si n^2 est un multiple de 3.

Sens direct. *Supposons n multiple de 3. On peut donc trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$.*
Ainsi $n^2 = 9k^2 = 3 \underbrace{(3k^2)}_{\in \mathbb{Z}}$, donc n^2 est multiple de 3.

Sens réciproque, par l'absurde. *Supposons* n *non multiple de* 3. *On a alors* $n \equiv 1 \pmod 3$ *ou* $n \equiv -1 \pmod 3$, *si bien que l'on peut trouver* $k \in \mathbb{Z}$ *et* $r \in \{-1, 1\}$ *tels que* $n = 3k + r$. *On a alors* $n^2 = (3k+r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2 = 3\underbrace{(3k^2 + 2kr)}_{\in\mathbb{Z}} + 1$, *donc* $n^2 \equiv 1 \pmod 3$.

En particulier, n^2 *n'est pas un multiple de* 3.

(b) En vous inspirant de la démonstration pour $\sqrt{2}$, montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Supposons par l'absurde $\sqrt{3}$ *rationnel. On peut donc trouver* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *premiers entre eux tels que* $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$. *On en déduit* $3 = \dfrac{p^2}{q^2}$ *et donc* $p^2 = 3q^2$.
On en déduit que p^2 *est un multiple de* 3 *donc, d'après la question précédente, que* p *est un multiple de* 3.
On peut donc trouver $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $p = 3k$. *On en déduit* $3q^2 = p^2 = 9k^2$, *donc* $q^2 = 3k^2$.
En particulier, q^2 *est multiple de* 3. *En utilisant à nouveau la question précédente, on obtient que* q *est un multiple de* 3.
Cela contredit l'hypothèse selon laquelle p *et* q *sont premiers entre eux, et conclut la démonstration.*

Partie III. Exemples plus sophistiqués.

Dans cette partie, on note $E = \left\{ a + bj \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

9. Montrer que E vérifie la condition **(R1)**.

Soit $z_1, z_2 \in E$. *On peut donc trouver* $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ *tels que* $z_1 = a_1 + b_1 j$ *et* $z_2 = a_2 + b_2 j$.
On a donc

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) j + b_1 b_2 j^2 \\ &= \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2)}_{\in\mathbb{Z}}, && \textit{(car } 1 + j + j^2 = 0\textit{)} \end{aligned}$$

ce qui montre $z_1 z_2 \in E$.

10. Étant donné $a, b \in \mathbb{Z}$, calculer $|a + bj|^2$, et l'exprimer comme la somme de deux carrés.

On a

$$\begin{aligned} |a + bj|^2 &= (a + bj)\overline{(a + bj)} \\ &= (a + bj)(a + bj^2) \\ &= a^2 + ab\, j + ab\, j^2 + b^2 && \textit{(car } j^3 = 1\textit{)} \\ &= a^2 - ab + b^2 && \textit{(car } 1 + j + j^2 = 0\textit{)} \\ &= \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} b^2 \\ &= \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b \right)^2. \end{aligned}$$

11. Déterminer exactement $E \cap \Delta$.

On procède par analyse et synthèse.

Analyse. *Soit* $z \in \mathrm{E} \cap \Delta$. *On peut trouver* $a, b \in \mathbb{Z}$ *tels que* $z = a + bj$. *D'après la question précédente, on a* $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b\right)^2 \leqslant 1$, *donc* $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \leqslant 1$ *et* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b\right)^2 \leqslant 1$, *donc* $\left|a - \frac{b}{2}\right| \leqslant 1$ *et* $|b| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$. *Remarquons que l'inégalité sur* a *équivaut à l'encadrement* $\frac{b}{2} - 1 \leqslant a \leqslant \frac{b}{2} + 1$.
Ainsi, on doit avoir $b \in \{-1, 0, 1\}$ *et*

- *si* $b = -1$, *on doit avoir* $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, *donc* $a = -1$ *ou* $a = 0$;
- *si* $b = 0$, *on doit avoir* $-1 \leqslant a \leqslant 1$, *donc* $a = -1$ *ou* $a = 0$ *ou* $a = 1$;
- *si* $b = 1$, *on doit avoir* $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$, *donc* $a = 0$ *ou* $a = 1$.

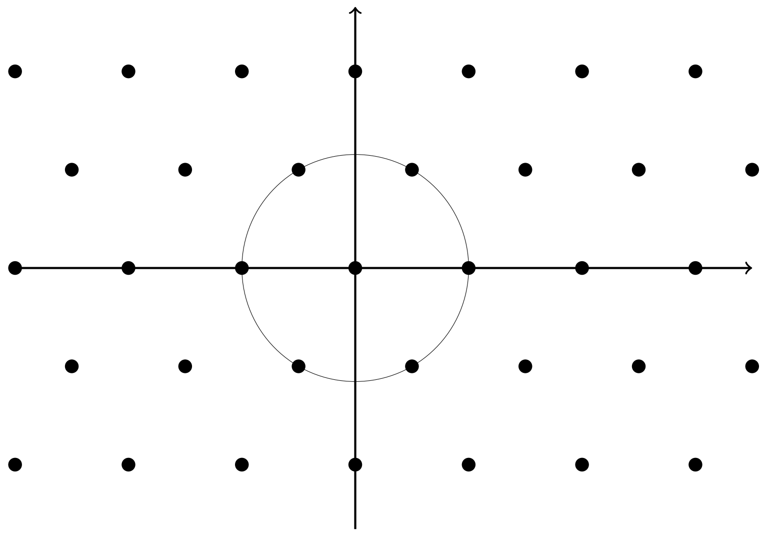
Ainsi, $z \in \{-1 - j, -j, -1, 0, 1, j, 1 + j\} = \mathbb{U}_6 \cup \{0\}$.

Synthèse. *Réciproquement, il est clair que* $1, \zeta_6 = 1 + j, j, -1, j^2 = -1 - j, \overline{\zeta_6} = -j$ *(tous six de module* 1*) et* 0 *sont éléments de* $\mathrm{E} \cap \Delta$.

In fine, $\mathrm{E} \cap \Delta = \mathbb{U}_6 \cup \{0\}$.

12. Déduire de ce qui précède que E est réticulé et que $\mathrm{N(E)} = 7$.

La description de E *montre assez directement qu'il s'agit d'un ensemble stable par somme, et la question 9 montre qu'il est stable par produit. La question précédente montre que* E *vérifie* ***(R3)*** *et que* $\mathrm{N(E)} = 7$. *D'après la question 3a, on en déduit que* E *est réticulé.*



L'ensemble E.

13. Montrer que $\mathrm{E}^\flat$ est réticulé, et déterminer $\mathrm{N}(\mathrm{E}^\flat)$.

D'après la question 7b, il suffit de montrer $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{E}^\flat, \frac{z_1}{z_2} \neq \pm i$. *On aura alors* $\mathrm{N}(\mathrm{E}^\flat) = 6$.

Soit $z_1, z_2 \in \mathrm{E}^\flat$. *Supposons par l'absurde* $\frac{z_1}{z_2} = \pm i$.

Le but est de montrer que cela contredit l'irrationalité de $\sqrt{3}$.
On peut trouver $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ *tels que* $z_1 = a_1 + b_1 j$ *et* $z_2 = a_2 + b_2 j$.
On a alors $0 = |z_2|^2 = a_2^2 - a_2 b_2 + b_2^2$. *Notons* d *cet entier non nul. On a*

$$\begin{aligned} \pm i &= \frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} \\ &= \frac{(a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j^2)}{|a_2 + b_2 j|^2} && \text{(en multipliant par } \overline{a_2 + b_2 j} = a_2 + b_2 j^2\text{)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + a_2b_1 j + a_1b_2 j^2}{d}$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 - a_1b_2}{d} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{d} j.$$

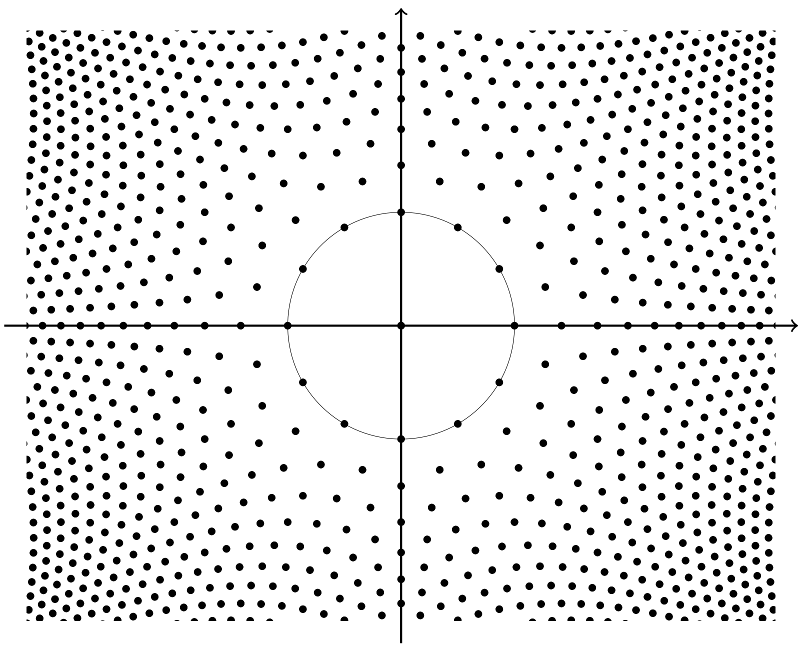
En passant à la partie imaginaire, on obtient $\pm 1 = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{d}\frac{\sqrt{3}}{2}$*, ce qui montre* $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$ *et enfin*

$$\sqrt{3} = \frac{\pm 2d}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Cela montre que $\sqrt{3}$ *est rationnel, et contredit la question 8b.*

14. Construire un ensemble réticulé F tel que $N(F) = 13$.

   D'après la question 3b, l'ensemble $F = \widehat{E}$ *est réticulé.*
   La construction effectuée à cette question montre que $F \cap \Delta$ *est formé des racines carrées des éléments de* $\mathbb{U}_6$ *(chaque élément en a deux, d'où un total de douze éléments, qui forment d'ailleurs l'ensemble* $\mathbb{U}_{12}$*, même si cela n'est pas nécessaire ici) et de* 0*, unique racine carrée de* 0*.*
   Ainsi, $N(F) = 13$.



L'ensemble $F = \widehat{E}$.

Partie IV. Résultats sur les racines de l'unité.

Dans toute cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité vérifie la condition **(R1)**.

   Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$.
   On a $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1$*, donc* $z_1 z_2 \in \mathbb{U}_n$.

16. (a) On suppose n pair. Montrer $\left\{\omega^2 \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\} = \mathbb{U}_{n/2}$.

   On procède par double inclusion.

Sens direct. *Soit* $z \in \left\{\omega^2 \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\}$*. On peut donc trouver* $\omega \in \mathbb{U}_n$ *tel que* $z = \omega^2$*.*

On a alors $z^{n/2} = \left(\omega^2\right)^{n/2} = \omega^n = 1$*, ce qui montre que* $z \in \mathbb{U}_{n/2}$*.*

Sens réciproque. *Soit* $z \in \mathbb{U}_{n/2}$*. D'après le cours, on peut trouver* $\omega \in \mathbb{C}$ *tel que* $\omega^2 = z$*.*

La condition $z^{n/2} = 1$ *se traduit en* $\omega^n = 1$*, ce qui montre que* $\omega \in \mathbb{U}_n$*.*
On a donc trouvé $\omega \in \mathbb{U}_n$ *tel que* $z = \omega^2$*, ce qui conclut.*

(b) On suppose n impair. Montrer $\left\{\omega^2 \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\} = \mathbb{U}_n$.

Sens direct. *Soit* $z \in \left\{\omega^2 \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\}$*. On peut donc trouver* $\omega \in \mathbb{U}_n$ *tel que* $z = \omega^2$*.*

Par la stabilité par produit montrée à la question 15, on en déduit $z \in \mathbb{U}_n$*.*

Sens réciproque. *Soit* $z \in \mathbb{U}_n$*. D'après le cours, on peut trouver* $\omega \in \mathbb{C}$ *tel que* $z = \omega^2$*. On a alors* $\omega^{2n} = 1$*, ou autrement dit* $\left(\omega^n\right)^2 = 1$*, ce qui montre* $\omega^n = \pm 1$*. On distingue alors deux cas.*

- *Si* $\omega^n = 1$*, on a* $\omega \in \mathbb{U}_n$*, et on a trouvé* $\omega \in \mathbb{U}_n$ *tel que* $z = \omega^2$*, ce qui conclut ;*
- *Si* $\omega^n = -1$*, on utilise l'imparité de* n *pour écrire* $1 = -\omega^n = (-\omega)^n$*. Le nombre* $-\omega$ *est donc un élément de* $\mathbb{U}_n$ *tel que* $(-\omega)^2 = z$*, ce qui conclut.*

Dans tous les cas, $z \in \left\{\omega^2 \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\}$*, ce qui conclut la démonstration.*

17. Dans toute cette question, on note

$$H_n = \left\{\omega_1 + \omega_2 \,\middle|\, (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{U}_n^2\right\}.$$

(a) Montrer $\forall z \in H_n, |z| \leqslant 2$.

Soit $z \in H_n$*. On peut donc trouver* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{U}_n$ *tels que* $z = \omega_1 + \omega_2$*. D'après l'inégalité triangulaire, on a donc*

$$|z| = |\omega_1 + \omega_2| \leqslant |\omega_1| + |\omega_2| \leqslant 2.$$

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $0 \in H_n$.

On va montrer que $0 \in H_n$ *si et seulement si* n *est pair.*

Sens direct. *Supposons* $0 \in H_n$*. On peut donc trouver* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{U}_n$ *tels que* $\omega_1 + \omega_2 = 0$*.*

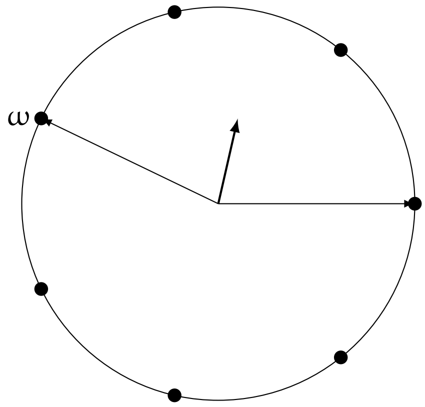
En divisant par ω_1 *(qui est non nul), on obtient* $1 + \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 0$*, c'est-à-dire* $-1 = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \overline{\omega_1}\,\omega_2$ *(car le nombre* ω_1 *étant de module 1, son inverse est égal à son conjugué).*
Or, $\left(\overline{\omega_1}\right)^n = \overline{\omega_1^n} = \overline{1} = 1$*, donc* $\overline{\omega_1} \in \mathbb{U}_n$*.*
D'après la question 15, on en déduit $-1 = \overline{\omega_1}\,\omega_2 \in \mathbb{U}_n$*, c'est-à-dire* $(-1)^n = 1$*, ce qui montre que* n *est pair.*

Sens réciproque. *Réciproquement, si* n *est pair, on a* $1, -1 \in \mathbb{U}_n$*, donc* $0 = 1 + (-1) \in H_n$*.*

(c) Montrer que si $n \geqslant 5$ est impair, H_n possède un élément dont le module appartient à $]0, 1[$.

Supposons $n \geqslant 5$ *impair. On peut donc trouver* $m \geqslant 2$ *tel que* $n = 2m + 1$*.*

Le nombre $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi m}{2m+1}\right)$ *appartient alors à* $\mathbb{U}_{2m+1} = \mathbb{U}_n$*. Comme le dessin suivant le montre, il a été choisi car il s'agit de l'un des deux points de* $\mathbb{U}_n$ *les plus proches de* -1*.*



On a alors $1+\omega \in H_n$. *Mais, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|1+e^{i\theta}\right| = \left|e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)\right| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|.$$

En particulier, pour $\theta = \dfrac{2\pi m}{2m+1}$, *on obtient*

$$\left|1+\omega\right| = 2\left|\cos\frac{\pi m}{2m+1}\right| = 2\cos\frac{\pi m}{2m+1}$$

car $\dfrac{\pi m}{2m+1} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a $\dfrac{m}{2m+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{m-1}{6m+3} > 0$, *car* $m \geqslant 2$. *Il est par ailleurs clair que* $\dfrac{m}{2m+1} < \dfrac{1}{2}$.

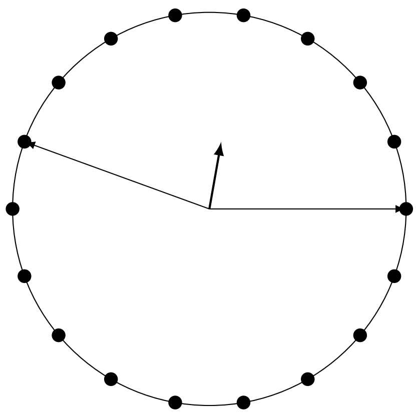
Il s'ensuit que $\dfrac{\pi m}{2m+1}$ *appartient en fait à l'intervalle ouvert* $\left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, *donc son cosinus appartient (par stricte décroissance de* $\cos$*) à l'intervalle* $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

Ainsi, $\left|1+\omega\right| = 2\cos\dfrac{\pi m}{2m+1} \in \left]0, 1\right[$, *ce qui conclut.*

(d) Démontrer le même résultat si $n \geqslant 8$ est pair.

Supposons $n \geqslant 8$ *pair. On peut donc trouver* $m \geqslant 4$ *tel que* $n = 2m$.

Posons $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi(m-1)}{2m}\right)$, *qui est bien élément de* $\mathbb{U}_{2m} = \mathbb{U}_n$.



Les mêmes calculs qu'à la question précédente montrent

$$|1+\omega| = 2\cos\left(\frac{\pi(m-1)}{2m}\right)$$

et l'encadrement $\dfrac{1}{3} < \dfrac{m-1}{2m} < \dfrac{1}{2}$ *(pour l'inégalité de gauche, constater que* $\dfrac{m-1}{2m} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{m-3}{6m}$ *est bien* > 0 *car* $m \geqslant 4$*) montre que ce module appartient à* $\left]0, 1\right[$.

Partie V. Conclusion.

On admet dans cette dernière partie le résultat suivant :

Soit G *un ensemble fini, non vide, stable par produit et inclus dans* $\mathbb{U}$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $G = \mathbb{U}_n$.

18. Soit A un ensemble réticulé. Montrer $N(A) \leqslant 13$.

La question 5b montre que les éléments de $A \cap \Delta$ *ont pour module* 0 *ou* 1. *Autrement dit, les éléments non nuls de* $A \cap \Delta$ *sont tous éléments de* $\mathbb{U}$.
Il est immédiat que $\mathbb{U}$ *est stable par produit. D'après la question 4, cela entraîne que* $A \cap \mathbb{U}$ *est également stable par produit (et inclus dans* $\mathbb{U}$*).*
Si $A \cap \mathbb{U}$ *est vide, la remarque précédente montre que* $A \cap \Delta$ *est soit vide, soit réduite au singleton* $\{0\}$, *donc on a* $N(A) \leqslant 1$. *Dans la suite, on supposera donc* $A \cap \mathbb{U}$ *non vide.*
Le résultat admis par l'énoncé entraîne alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $A \cap \Delta = \mathbb{U}_n$.
On en déduit que $N(A) = n + 1$ *si* $0 \in A$, *et* n *sinon. Si l'on veut faire chic,* $N(A) = n + \mathbb{1}_{(0 \in A)}$. *Il suffit donc de montrer* $n \leqslant 12$, *ce que nous allons faire par disjonction de cas.*

Premier cas. *Supposons* n *impair. On va commencer par montrer* $H_n \subseteq A$.
Soit $z \in H_n$. *On peut donc trouver* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{U}_n$ *tels que* $z = \omega_1 + \omega_2$.
D'après la question 16b, on peut trouver $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{U}_n$ *tels que* $\omega_1 = \zeta_1^2$ *et* $\omega_2 = \zeta_2^2$. *Comme* ζ_1 *et* ζ_2 *sont éléments de* $\mathbb{U}_n$, *qui est lui-même inclus dans* A, *on a* $\zeta_1, \zeta_2 \in A$.
Ainsi, $z = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 \in A$ *d'après la propriété* ***(R2)***.
En confrontant les questions 5b et 17c, on en déduit alors $n < 5$ *(c'est-à-dire* $n \leqslant 3$, *en prenant en compte la parité).*

Deuxième cas. *Supposons* n *pair. On montre de la même façon* $H_{n/2} \subseteq A$ *(en utilisant la question 16a plutôt que 16b). On distingue alors à nouveau deux cas.*

- *Si* $n/2$ *est impair, la confrontation des questions 5b et 17c montre* $n/2 \leqslant 3$, *c'est-à-dire* $n \leqslant 6$.
- *Si* $n/2$ *est pair, la confrontation des questions 5b et 17d montre* $n/2 < 8$, *c'est-à-dire* $n/2 \leqslant 6$, *ou encore* $n \leqslant 12$.

Dans tous les cas, on a donc $n \leqslant 12$, *ce qui conclut.*

19. Déterminer toutes les valeurs possibles pour l'entier $N(A)$ associé à un ensemble réticulé A.

On continue à supposer $A \cap \mathbb{U}$ *non vide, ce qui garantit l'existence de* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_n$.
En y regardant de plus près, la question précédente donne en fait plus de contraintes sur n *(et donc sur* $N(A)$*) que la simple majoration* $n \leqslant 12$.
Déjà, la seule valeur impaire possible pour n *est* 1. *En effet, on a vu à la question précédente que si* n *était impair, on avait forcément* $n \leqslant 3$. *Mais le cas* $n = 3$ *est impossible, car il entraîne* $j \in A$, *qui entraîne à son tour* $\mathbb{U}_6 \subseteq A$ *d'après la question 6b. Cela contredit* $A \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_3$.
Par ailleurs, si l'on suppose n *pair et* $n/2$ *impair, la question précédente a montré* $n \leqslant 6$.
Enfin, si n *est pair, ainsi que* $n/2$ *(c'est-à-dire si* n *est multiple de 4), on a* $i \in A$ *et donc, d'après la question 6a, on a nécessairement* $0 \in A$, *et donc* $N(A) = 1 + n$.
Une fois toutes ces contraintes exposées, on voit que les seules valeurs non encore exclues pour $N(A)$ *sont :*

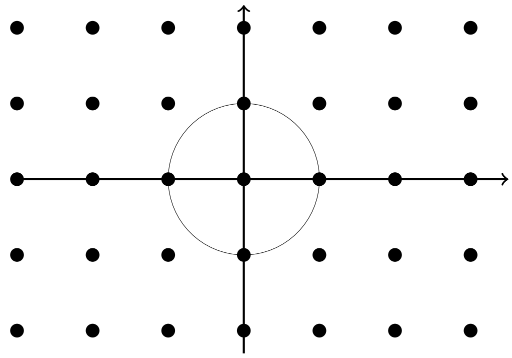
- *si* $A \cap \mathbb{U}$ *est vide :* 0 *et* 1 *;*
- *si* n *est impair (donc égal à* 1*) :* 1 *et* 2 *;*
- *si* n *est pair, mais pas multiple de 4 :* 2 *et* 3 *(cas* $n = 2$*),* 6 *et* 7 *(cas* $n = 6$*) ;*
- *si* n *est multiple de 4 :* 5 *(cas* $n = 4$*),* 9 *(cas* $n = 8$*) et* 13 *(cas* $n = 12$*).*

La plupart de ces nombres ont en fait déjà été obtenus dans le sujet :

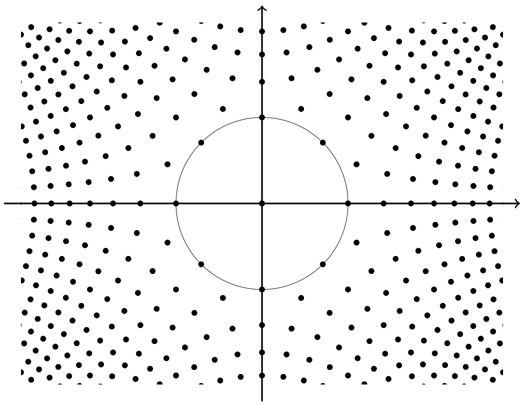
$N(A)$	0	1	2	3	5	6	7	9	13
exemple	$]1, +\infty[$	$[1, +\infty[$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	**?**	$E^\flat$	E	**?**	$\widehat{E}$
question	2			1	**?**	13	12	**?**	14

Une construction finalement assez proche de E *va nous donner les deux exemples manquants.*

- *On vérifie facilement que* $G = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ *est un ensemble vérifiant **(R1)** et stable par somme. Pour tous* $a, b \in \mathbb{Z}$*, on a* $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$*, et on en déduit facilement que* $G \cap \Delta = \{0\} \cup \mathbb{U}_4$*. En particulier,* G *vérifie **(R3)** et* $N(G) = 5$*.*
  D'après la question 3a, on en déduit que G *est un ensemble réticulé, ce qui fournit le premier exemple manquant.*
- *D'après la question 3b, on en déduit également que* $\widehat{G}$ *est un ensemble réticulé, et le même raisonnement qu'à la question 14 montre que* $N(\widehat{G}) = 9$*.*
  On a ainsi construit le dernier exemple manquant.



L'ensemble G*.*



L'ensemble $\widehat{G}$*.*

Remarquons que G *ne respecte pas la condition de la question 7b, ce qui explique que* $G^\flat$ *ne figure pas dans les exemples que nous créons. C'est d'ailleurs heureux puisque notre raisonnement a montré qu'il n'existait pas d'ensemble réticulé* A *tel que* $N(A) = 4$*. C'est même la première valeur interdite.*

In fine, *les valeurs possibles pour* $N(A)$ *sont* 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 *et* 13.

Remarque. Les ensembles G et E sont des ensembles remarquables du plan complexe, possédant de magnifiques propriétés algébriques et géométriques. Il s'agit de l'ensemble des *entiers de Gauss* et de l'ensemble des *entiers d'Eisenstein*, respectivement.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Gotthold Eisenstein (1823-1852).