Deuxième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Les deux exercices et le problème sont indépendants les uns des autres. Je prévois que le poids des exercices se situera entre 30% et 40% de la note globale.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats. Je me réserve le droit de ne pas lire les parties de votre copie qui contreviendront à cette consigne.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1. Un peu d'injectivité.

Dans tout l'exercice, E, F et G sont trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et que f est surjective, alors g est injective.
4. Les deux applications suivantes sont-elles injectives ?

   (a) $u : \begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{Z} \\ n \mapsto n^2 + n \end{cases}$;

   (b) $v : \begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n^2 + n \end{cases}$.

Exercice 2. Une anthologie de calculs.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Résoudre le système $\begin{cases} x + y = & 2 - 2i \\ \quad xy = & -3 + 2i \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)\ \sin(x)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ est pair.
4. Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $n \geqslant 1$.

   (a) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \geqslant \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta)$.

   (c) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\sin(k\theta)| \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2\ \sin(\theta)}$.

Problème. Ensembles réticulés.

Notations générales.

- Comme toujours, on note $j = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
- On note $\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \leqslant 1 \right\}$.
- Étant donné un ensemble $A \subseteq \mathbb{C}$, on considère les trois assertions suivantes :

  (R1) A est *stable par produit*, c'est-à-dire que $\forall z_1, z_2 \in A, z_1\, z_2 \in A$;

  (R2) $\forall z_1, z_2 \in A, z_1^2 + z_2^2 \in A$;

  (R3) l'intersection $A \cap \Delta$ est un ensemble fini (c'est-à-dire un ensemble possédant un nombre fini d'éléments).

  L'ensemble A sera dit *réticulé* si les trois assertions **(R1)**, **(R2)** et **(R3)** sont vraies.
- Étant donné un ensemble $A \subseteq \mathbb{C}$ vérifiant la condition **(R3)**, on notera $N(A)$ le nombre d'éléments de l'ensemble fini $A \cap \Delta$.

Le but de ce problème est de déterminer les valeurs possibles pour $N(A)$, quand $A \subseteq \mathbb{C}$ est un ensemble réticulé.

Les parties I, II, et IV sont assez largement indépendantes et peuvent être abordées séparément.

A contrario, *les parties III et V utilisent les notations et les résultats des parties précédentes.*

Partie I. Premiers exemples.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Pour les quatre parties suivantes, déterminer (en justifiant rapidement) si les assertions **(R1)**, **(R2)** et **(R3)** sont vraies.

   (a) $A = \mathbb{Z}$; (b) $A = i\mathbb{R}$; (c) $A = \Delta$.

2. Donner sans justification :
   (a) un exemple d'ensemble réticulé A **non vide** tel que $N(A) = 0$;
   (b) un exemple d'ensemble réticulé A tel que $N(A) = 1$;
   (c) un exemple d'ensemble réticulé A tel que $N(A) = 2$.

3. Dans cette question, on note $q : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \end{cases}$ la fonction « carrée ».

   Soit $L \subseteq \mathbb{C}$ une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant **(R1)** et **(R3)**, et *stable par somme*, c'est-à-dire telle que l'on ait $\forall z_1, z_2 \in L, z_1 + z_2 \in L$.
   (a) Montrer que L est réticulé.
   (b) Montrer que l'image réciproque $\widehat{L} = q^{-1}[L]$ est également réticulée.

4. Soit $n \geqslant 1$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles réticulés.

   Montrer que l'intersection $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ est réticulée.

Partie II. Quelques résultats utiles.

Les quatre questions sont indépendantes.

5. Soit A un ensemble réticulé.
   (a) Montrer que $\forall z \in A, \forall n \in \mathbb{N}^*, z^n \in A$.
   (b) En déduire que A ne contient pas d'élément dont le module appartienne à $]0, 1[$.
6. Soit A un ensemble réticulé.
   (a) Montrer que si $i \in A$, alors $\{0\} \cup \mathbb{U}_4 \subseteq A$.
   (b) Montrer que si $j \in A$, alors $\mathbb{U}_6 \subseteq A$.
7. Soit A un ensemble réticulé.
   (a) On définit $A^\sharp = A \cup \{0\}$. Montrer que $A^\sharp$ est réticulé.
   (b) On définit $A^\flat = A \setminus \{0\}$.
   Montrer que $A^\flat$ est réticulé si et seulement si $\forall z_1, z_2 \in A^\flat, \dfrac{z_1}{z_2} \notin \{-i, i\}$.
8. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que n est un multiple de 3 si et seulement si n^2 est un multiple de 3.
   (b) En vous inspirant de la démonstration pour $\sqrt{2}$, montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Partie III. Exemples plus sophistiqués.

Dans cette partie, on note $E = \left\{ a + bj \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

9. Montrer que E vérifie la condition **(R1)**.
10. Étant donné $a, b \in \mathbb{Z}$, calculer $|a + bj|^2$, et l'exprimer comme la somme de deux carrés.
11. Déterminer exactement $E \cap \Delta$.
12. Déduire de ce qui précède que E est réticulé et que $N(E) = 7$.
13. Montrer que $E^\flat$ est réticulé, et déterminer $N(E^\flat)$.
14. Construire un ensemble réticulé F tel que $N(F) = 13$.

Partie IV. Résultats sur les racines de l'unité.

Dans toute cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité vérifie la condition **(R1)**.
16. (a) On suppose n pair. Montrer $\left\{\omega^2 \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\} = \mathbb{U}_{n/2}$.

    (b) On suppose n impair. Montrer $\left\{\omega^2 \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\} = \mathbb{U}_n$.
17. Dans toute cette question, on note

$$H_n = \left\{\omega_1 + \omega_2 \,\middle|\, (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{U}_n^2\right\}.$$

   (a) Montrer $\forall z \in H_n, |z| \leqslant 2$.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $0 \in H_n$.

   (c) Montrer que si $n \geqslant 5$ est impair, H_n possède un élément dont le module appartient à $]0, 1[$.

   (d) Démontrer le même résultat si $n \geqslant 8$ est pair.

Partie V. Conclusion.

On admet dans cette dernière partie le résultat suivant :

Soit G *un ensemble fini, non vide, stable par produit et inclus dans* $\mathbb{U}$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $G = \mathbb{U}_n$.

18. Soit A un ensemble réticulé. Montrer $N(A) \leqslant 13$.
19. Déterminer toutes les valeurs possibles pour l'entier $N(A)$ associé à un ensemble réticulé A.