Troisième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$.

1. Soit $u, v \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer $\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(v)$ et $\operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v)$.

   On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(v) &= \frac{e^u + e^{-u}}{2}\frac{e^v - e^{-v}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2}\frac{e^v + e^{-v}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\Big(\left(e^{u+v} - e^{u-v} + e^{-u+v} - e^{-u-v}\right) \\
&\qquad + \left(e^{u+v} + e^{u-v} - e^{-u+v} - e^{-u-v}\right)\Big) \\
&= \frac{e^{u+v} - e^{-u-v}}{2} = \operatorname{sh}(u+v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{et}\quad \operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v) &= \frac{e^u + e^{-u}}{2}\frac{e^v + e^{-v}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2}\frac{e^v - e^{-v}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\Big(\left(e^{u+v} + e^{u-v} + e^{-u+v} + e^{-u-v}\right) \\
&\qquad + \left(e^{u+v} - e^{u-v} - e^{-u+v} + e^{-u-v}\right)\Big) \\
&= \frac{e^{u+v} + e^{-u-v}}{2} = \operatorname{ch}(u+v).
\end{aligned}$$

   (b) Exprimer $\operatorname{th}(u+v)$ en fonction de $\operatorname{th}(u)$ et $\operatorname{th}(v)$.

   On procède comme pour la fonction tangente : on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(u+v) &= \frac{\operatorname{sh}(u+v)}{\operatorname{ch}(u+v)} \\
&= \frac{\operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(v)}{\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v)} \\
&= \frac{\frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)} + \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}}{1 + \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}\frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)}} \\
&= \frac{\operatorname{th}(u) + \operatorname{th}(v)}{1 + \operatorname{th}(u)\operatorname{th}(v)}.
\end{aligned}$$

(c) En déduire $\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(2t) = \dfrac{2\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{th}^2(t)}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. *On a directement en appliquant la question précédente*

$$\operatorname{th}(2t) = \frac{\operatorname{th}(t)+\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{th}(t)\operatorname{th}(t)} = \frac{2\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{th}^2(t)}.$$

2. (a) Effectuer un $\mathrm{DL}_5(0)$ de th.

C'est quasiment le même calcul que le $\mathrm{DL}_5(0)$ *de* tan *effectué en cours. On calcule d'abord un* $\mathrm{DL}_4(0)$ *de* $\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{ch} x} &= \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} \\
&= 1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^4) \\
&\qquad\qquad \textit{car} \begin{cases} \dfrac{1}{1+u} = 1-u+u^2+o(u^2) \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \\
&= 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+o(x^4) \\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{donc} \qquad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} &= \left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\right) \\
&= x-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{24}x^5+o(x^5) \\
&\quad +\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12} \\
&\quad +\frac{x^5}{120} \\
&= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).
\end{aligned}$$

(b) En déduire un équivalent de th au voisinage de 0, puis la valeur de $\ell = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{th}(t)}{t}$.

On en déduit immédiatement $\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, *c'est-à-dire* $\dfrac{\operatorname{th}(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Notons que le $\mathrm{DL}_1(0)$ $\operatorname{th}(x) = \operatorname{th}(0)+\operatorname{th}'(0)x+o(x) = x+o(x)$ *aurait suffi, mais il eût été dommage de se priver d'un calcul aussi réjouissant.*

3. (a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(1+\operatorname{th}^2\left(\dfrac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(2)+\ln\left(\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)\right)-\ln\left(\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)\right)$.

Commençons par remarquer que, pour tout $t > 0$, *on a* $\operatorname{th}(t) > 0$ *et que* $\ln\big(\operatorname{th}(t)\big)$ *est donc bien défini. La formule de l'énoncé a donc bien un sens.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On applique la question 1c à* $\dfrac{x}{2^k}$ *et on obtient*

$$\underbrace{\operatorname{th}\left(2\frac{x}{2^k}\right)}_{>0} = \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$

$$\text{donc} \qquad \underbrace{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}_{>0} = \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}$$

$$\text{donc} \qquad \ln\left(1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).$$

(b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, S_n(x) = \ln\left(2^n \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\big(\operatorname{th}(x)\big)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *En sommant les inégalités de la question précédente pour* $k \in [\![1, n]\!]$, *on obtient*

$$\begin{aligned} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(2) + \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\right] \\ &= n\ln(2) + \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\right] \\ &= \ln(2^n) + \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^0}\right)\right) \qquad \textit{(par télescopage)} \\ &= \ln\left(2^n \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\big(\operatorname{th}(x)\big). \end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

La suite $\left(\dfrac{x}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à valeurs non nulles et converge vers* 0, *donc, par composition des limites :*

$$\frac{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{donc} \qquad 2^n \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Par continuité du logarithme en x, *on en déduit* $\ln\left(2^n \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln x$.

Par opérations, on en déduit $S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(x) - \ln\big(\operatorname{th}(x)\big)$.

Exercice 2

1. Écrire sans démonstration $D_{\tan} = \cos^{-1}[\mathbb{R}^*]$ comme une réunion (infinie) d'intervalles.

   On a $D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

2. On définit la fonction *sécante* $\sec : \begin{cases} D_{\tan} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)} \end{cases}$.

   Montrer que sec et tan sont lisses sur $D_{\tan}$.

   - *La fonction* sec *est lisse en tant que composée de la fonction* $\begin{cases} D_{\tan} \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$ *induite par cosinus et de la fonction inverse* $\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ t \mapsto \dfrac{1}{t} \end{cases}$.
   - *La fonction* tan *est alors lisse en tant que produit des deux fonctions lisses* sin *et* sec.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Une fonction lisse $f : I \to \mathbb{R}$ sera dite *absolument monotone (sur* I*)* si $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\tau \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $x \mapsto e^{\tau x}$ soit absolument monotone sur $\mathbb{R}$.

   Notons déjà que la fonction $f : x \mapsto e^{\tau x}$ *est lisse par opérations.*

   On va montrer qu'une condition nécessaire est suffisante est $\tau \geqslant 0$.

   Condition nécessaire. *Supposons* f *absolument monotone. En particulier, on a* $\tau = f'(0) \geqslant 0$.

   Condition suffisante. *Supposons* $\tau \geqslant 0$. *On montre par récurrence que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la dérivée* n*-ième de* f *est* $f^{(n)} : x \mapsto \tau^n e^{\tau x}$, *qui est clairement à valeurs positives. Cela montre que* f *est absolument monotone.*

4. La fonction arctan est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+$?

   La fonction arctan *est lisse sur* $\mathbb{R}$ *(par exemple en tant que réciproque d'une bijection lisse dont la dérivée ne s'annule jamais). D'après le théorème de Taylor-Young, on a donc*

   $$\arctan(x) = \arctan(0) + \arctan'(0)x + \frac{\arctan''(0)}{2!}x^2 + \frac{\arctan'''(0)}{3!}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

   Par ailleurs, le formulaire garantit que $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. *Par unicité du développement limité, on en déduit* $\arctan'''(0) = -2$, *ce qui montre que* arctan *n'est pas absolument monotone.*

   (Il y a évidemment d'autres façons de justifier cela, mais on pourra apprécier que la connaissance des DL usuels permet parfois d'éviter des calculs un peu pénibles.)

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion « il existe des entiers naturels $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ tels que $\forall x \in D_{\tan}, \tan^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \tan(x)^k$. »

   Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence.

   Initialisation. *On a* $\tan^{(0)} = \tan$, *donc l'assertion* $P(1)$ *est vraie :* $a_0 = 0$ *et* $a_1 = 1$ *conviennent.*

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(n)$.

On peut donc trouver $\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_n, \widetilde{a}_{n+1} \in \mathbb{N}$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}, \tan^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \widetilde{a}_k \tan(x)^k$.

Cette formule nous permet de calculer la dérivée $\tan^{(n+1)} = \left(\tan^{(n)}\right)'$ *: pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a (en notant que* $x \mapsto \widetilde{a}_0 \tan(x)^0$ *est une fonction constante, dont la dérivée est donc nulle).*

$$\begin{aligned}
\tan^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{a}_k\, k \left(1 + \tan^2(x)\right) \tan(x)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k\, \widetilde{a}_k \tan(x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} k\, \widetilde{a}_k \tan(x)^{k+1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} (\ell+1)\, \widetilde{a}_{\ell+1} \tan(x)^{\ell} + \sum_{\ell=2}^{n+2} (\ell-1)\, \widetilde{a}_{\ell-1} \tan(x)^{\ell} \\
&= \widetilde{a}_1 + 2\widetilde{a}_2 \tan(x) + \sum_{\ell=2}^{n} \left[(\ell-1)\, \widetilde{a}_{\ell-1} + (\ell+1)\, \widetilde{a}_{\ell+1}\right] \tan(x)^{\ell} \\
&\qquad + n\, \widetilde{a}_n \tan(x)^{n+1} + (n+1)\, \widetilde{a}_{n+1} \tan(x)^{n+2}.
\end{aligned}$$

On pose alors $a_0 = \widetilde{a}_1$*,* $a_1 = 2\widetilde{a}_2$*,* $a_{n+1} = n\, \widetilde{a}_n$*,* $a_{n+2} = (n+1)\, \widetilde{a}_{n+1}$ *et, pour tout entier « intermédiaire »* $\ell \in [\![2, n]\!]$, $a_\ell = (\ell-1)\widetilde{a}_{\ell-1} + (\ell+1)\widetilde{a}_{\ell+1}$.

On obtient ainsi une liste $a_0, \dots, a_{n+2}$ *d'entiers naturels (par stabilité par somme et produit de* $\mathbb{N}$*) vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan^{(n+1)}(x) = \sum_{\ell=0}^{n+2} a_\ell \tan(x)^{\ell},$$

ce qui montre $P(n+1)$*, et clôt la récurrence.*

(b) En déduire que la fonction tan est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$*. D'après la question précédente, on peut trouver des entiers naturels* $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ *tels que* $\tan^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \tan(x)^k$*. Comme* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$*, on a* $\tan(x) \geqslant 0$ *et on en déduit immédiatement que* $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

6. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument monotones.

(a) Montrer que $f+g$ est absolument monotone.

Déjà, f *et* g *sont lisses, donc* $f+g$ *est lisse par opérations.*

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in I$*. On a*

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geqslant 0,$$

ce qui montre que $f+g$ *est absolument monotone.*

(b) Montrer que fg est absolument monotone.

Comme à la question précédente, fg *est lisse par opérations.*

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in I$. *On a d'après la formule de Leibniz*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\geqslant 0} \underbrace{f^{(k)}(x)}_{\geqslant 0} \underbrace{g^{(n-k)}(x)}_{\geqslant 0},$$

ce qui montre $(fg)^{(n)}(x) \geqslant 0$, *et conclut.*

(c) Montrer (par exemple, par récurrence) que $\exp \circ f$ est absolument monotone.

Ici encore, $\exp \circ f$ *est lisse par opérations. Notons cette fonction* φ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* $P(n)$ *l'assertion* $\forall x \in I, \varphi^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ *par récurrence forte.*

Initialisation. *Pour tout* $x \in I$, *on a* $\varphi(x) = e^{f(x)} \geqslant 0$. *Cela démontre* $P(0)$.
Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(0)$ *et* $P(1)$ *et* $\cdots$ *et* $P(n)$. *Montrons* $P(n+1)$.

La dérivée $(n+1)$*-ième de* φ *est la dérivée* n*-ième de* $\varphi' : x \mapsto f'(x)\, e^{f(x)} = f'(x)\, \varphi(x)$. *D'après la formule de Leibniz, on a donc, pour tout* $x \in I$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x)\, (f')^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x)\, f^{(n-k+1)}(x).\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in I$ *et tout* $k \in [\![0, n]\!]$,

- $\varphi^{(k)}(x) \geqslant 0$, *d'après* $P(k)$;
- $f^{(n-k+1)}(x) \geqslant 0$, *car* f *est supposée absolument monotone.*

On en déduit que $\forall x \in I, \varphi^{(n+1)}(x) \geqslant 0$, *ce qui montre* $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

7. Montrer que sec est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On a vu que sec *est lisse. On va utiliser le fait que sa dérivée est* $\sec' = \frac{\sin}{\cos^2} = \sec\, \tan$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *notons* $Q(n)$ *l'assertion* « $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \sec^{(n)}(x) \geqslant 0$. »

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ *par récurrence forte.*

Initialisation. *Pour tout* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, *on a* $\cos(x) > 0$, *donc* $\sec(x) \geqslant 0$. *Cela montre* $Q(0)$.
Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $Q(0)$ *et* $Q(1)$ $\cdots$ *et* $Q(n)$. *Montrons* $Q(n+1)$. *La dérivée* $(n+1)$*-ième de* sec *est la dérivée* n*-ième de* $\sec' = \sec\, \tan$, *c'est-à-dire, d'après la formule de Leibniz :*

$$\sec^{(n+1)} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sec^{(k)}(x)\, \tan^{(n-k)}(x).$$

Or, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et tout* $k \in [\![0, n]\!]$,

- $\sec^{(k)}(x) \geqslant 0$ *d'après* $Q(n)$;
- $\tan^{(n-k)}(x) \geqslant 0$ *d'après la question 5b,*

donc $\sec^{(n+1)}(x) \geqslant 0$, *ce qui montre* $Q(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

Problème. Loi de réciprocité pour les sommes de Dedekind.

Dans tout le problème, b désignera un entier strictement positif.

On notera alors systématiquement $\zeta = \zeta_b = \exp\left(i\frac{2\pi}{b}\right)$.

Partie I. La fonction cotangente.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $\cot : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, le quotient $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est bien défini si et seulement si $\sin(x) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Ainsi, le domaine de définition cherché est

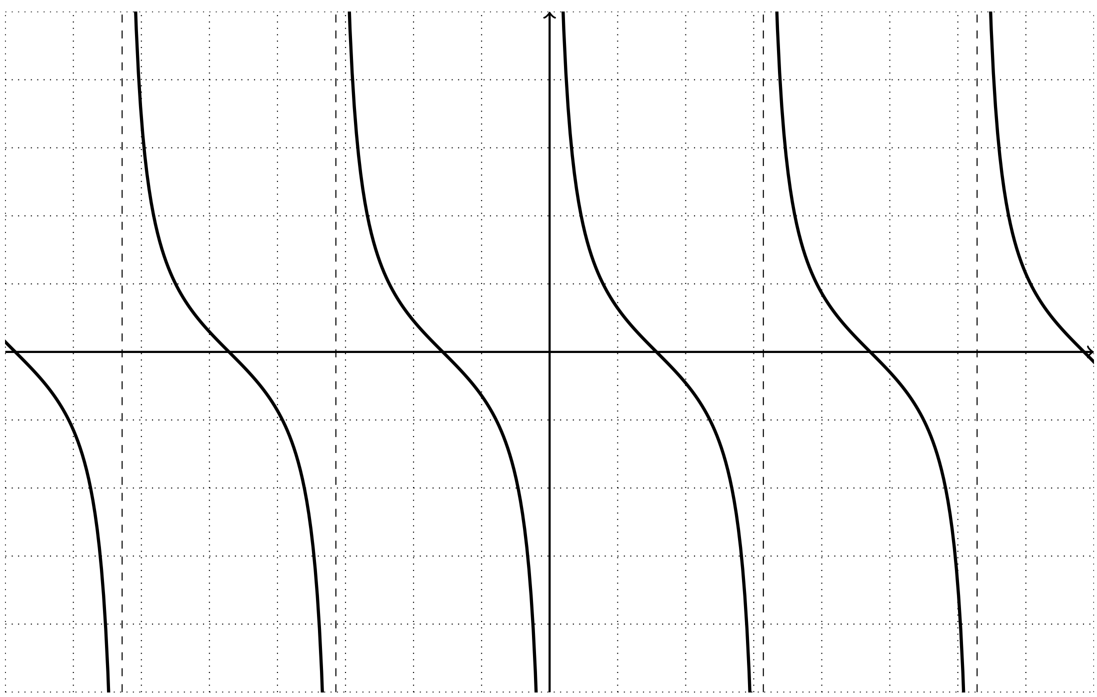
   $$D = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \pmod{\pi}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[.$$

2. Montrer $\forall x \in D, \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$ et tracer le graphe de cot.

   Soit $x \in D$. On a bien $\dfrac{\pi}{2} - x \in D_{\tan}$, puis

   $$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x).$$

   On en déduit le graphe de cot *par réflexion par rapport à la droite verticale $x = \dfrac{\pi}{4}$ à partir du graphe de la fonction tangente.*



3. Résoudre l'équation $\cot(x) = \sqrt{3}$, d'inconnue $x \in D$.

Soit $x \in D$. *On a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned} \cot(x) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3} && \textit{(question préc.)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \equiv \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{=\arctan(\sqrt{3})} \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow x \equiv \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}} \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Montrer que la fonction $\Lambda : \begin{cases} D \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(|\sin(x)|\right) \end{cases}$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

- *La fonction* Λ *est déjà bien définie car, pour tout* $x \in D$, $\sin(x) \neq 0$ *donc* $|\sin(x)| > 0$.
- *La fonction* Λ *est par ailleurs* π*-périodique. En effet, le domaine* D *est manifestement* π*-périodique et l'on a, pour tout* $x \in D$,

$$\Lambda(x+\pi) = \ln\left(|\sin(x+\pi)|\right) = \ln\left(|-\sin(x)|\right) = \ln\left(|\sin(x)|\right) = \Lambda(x).$$

- *Il suffit donc de vérifier la dérivabilité de* Λ *en tout point de* $]0, \pi[$, *qui est crucialement un intervalle sur lequel* $\sin > 0$. *Soit* $x_0 \in]0, \pi[$. *Comme* Λ *et* $f : t \mapsto \ln\left(\sin(t)\right)$ *coïncident sur* $]0, \pi[$, *qui est un voisinage de* x_0, *la fonction* Λ *hérite de la dérivabilité en* x_0 *de* f.

  Ainsi, Λ *est dérivable en* x_0 *et* $\Lambda'(x_0) = f'(x_0) = \dfrac{\cos(x_0)}{\sin(x_0)} = \cot(x_0)$.

In fine, *on a montré que* Λ *était dérivable sur* D, *et que* $\Lambda' = \cot$.

5. Soit $b \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, b-1]\!]$. Calculer $\dfrac{1+\zeta^k}{1-\zeta^k}$ en fonction de cot.

On a (remarquons que $\zeta^k = \exp\left(i\frac{2\pi}{b}k\right) \neq 1$*) :*

$$\begin{aligned} \frac{1+\zeta^k}{1-\zeta^k} &= \frac{1+\exp\left(i\frac{2\pi}{b}k\right)}{1-\exp\left(i\frac{2\pi}{b}k\right)} \\ &= \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{b}k\right)\left[\exp\left(-i\frac{\pi}{b}k\right) + \exp\left(i\frac{\pi}{b}k\right)\right]}{\exp\left(i\frac{\pi}{b}k\right)\left[\exp\left(-i\frac{\pi}{b}k\right) - \exp\left(i\frac{\pi}{b}k\right)\right]} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{b}k\right)}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{b}k\right)} \\ &= i\cot\left(\frac{\pi}{b}k\right). \end{aligned}$$

6. Soit $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 + x_2 \in D$. Exprimer $\cot(x_1 + x_2)$ en fonction de $\cot(x_1)$ et $\cot(x_2)$.

   Par un calcul en tout point semblable à celui effectué dans le cours, $\cot(x_1 + x_2) = \dfrac{\cot(x_1)\cot(x_2) - 1}{\cot(x_1) + \cot(x_2)}$.

7. Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Le but de cette question est d'établir la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) = \frac{1}{2^{b-1}} \sin(\pi x).$$

   Pour cela, on admettra la factorisation

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^b - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_b} (z - \omega), \tag{☼}$$

   que le cours sur les polynômes permettra de déduire du fait que l'ensemble $\mathbb{U}_b$ des racines b-ièmes de l'unité est précisément l'ensemble des racines du polynôme $X^b - 1$.

   (a) En utilisant la factorisation (☼), montrer $\forall x \in \mathbb{R}, e^{i\,2\pi x} - 1 = \displaystyle\prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s}\right)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On va appliquer (☼) à $z = e^{i\frac{2\pi}{b}x}$ mais il reste à simplifier le second membre de l'égalité.

   Il est traditionnel de lister les b éléments de $\mathbb{U}_b$ comme les éléments de la famille $\left(e^{i\frac{2\pi}{b}s}\right)_{s=0}^{b-1}$.

   Mais, l'ensemble $\mathbb{U}_b$ étant stable par conjugaison (ou, plus précisément, la conjugaison complexe fournissant une bijection $\mathbb{U}_b \to \mathbb{U}_b$), on peut également les lister comme les éléments de la famille conjuguée $\left(\overline{e^{i\frac{2\pi}{b}s}}\right)_{s=0}^{b-1} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{b}s}\right)_{s=0}^{b-1}$.

   Ainsi, le produit de droite s'écrit

$$\prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s}\right) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z - \omega) = z^b - 1 = e^{i\,2\pi x} - 1.$$

   (b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression simplifiée du produit $\displaystyle\prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{\pi}{b}(x+s)} - e^{-i\frac{\pi}{b}(x+s)}\right)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, en faisant apparaître « de force » les termes qui apparaissent dans la question précédente :

$$\begin{aligned}
\prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{\pi}{b}(x+s)} - e^{-i\frac{\pi}{b}(x+s)}\right) &= \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} e^{-i\frac{\pi}{b}x} e^{i\frac{\pi}{b}s} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s} e^{i\frac{\pi}{b}s} e^{-i\frac{\pi}{b}x}\right) \\
&= \prod_{s=0}^{b-1} \left[e^{i\frac{\pi}{b}s} e^{-i\frac{\pi}{b}x} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s}\right)\right] \\
&= \underbrace{\prod_{s=0}^{b-1} e^{i\frac{\pi}{b}s}}_{=e^{i\frac{\pi}{b}(0+1+\cdots+b-1)}} \; \underbrace{\prod_{s=0}^{b-1} e^{-i\frac{\pi}{b}x}}_{=\left(e^{-i\frac{\pi}{b}x}\right)^b} \; \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s}\right) \\
&= e^{i\pi\frac{b-1}{2}} \, e^{-i\pi x} \left(e^{i\,2\pi x} - 1\right) \\
&= i^{b-1}\left(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}\right).
\end{aligned}$$

(c) Conclure.

Soit $x \in \mathbb{R}$*. On a*

$$\begin{aligned}\prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) &= \prod_{s=0}^{b-1} \frac{e^{i\frac{x+s}{b}\pi} - e^{-i\frac{x+s}{b}\pi}}{2i} \\ &= \frac{1}{(2i)^b} \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{\pi}{b}(x+s)} - e^{-i\frac{\pi}{b}(x+s)}\right) \\ &= \frac{1}{(2i)^b} i^{b-1}\left(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}\right) && \textit{(question préc.)} \\ &= \frac{1}{2^{b-1}} \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i} \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{2^{b-1}}.\end{aligned}$$

8. Déduire de la question précédente $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \cot(\pi x) = \dfrac{1}{b} \displaystyle\sum_{s=0}^{b-1} \cot\left(\frac{x+s}{b}\pi\right)$.

La question précédente montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$*, on a l'égalité* $\displaystyle\prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) = \frac{1}{2^{b-1}} \sin(\pi x)$*.* *Remarquons que, comme* $x \notin \mathbb{Z}$*, on a* $\pi x \in D$*, donc cette égalité concerne des nombres non nuls. En passant à la valeur absolue puis au logarithme, on a donc l'égalité des deux fonctions*

$$\varphi : \begin{cases} D \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(\left|\displaystyle\prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right)\right|\right) = \displaystyle\sum_{s=0}^{b-1} \ln\left(\left|\sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right)\right|\right) = \displaystyle\sum_{s=0}^{b-1} \Lambda\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) \end{cases}$$

et $$\psi : \begin{cases} D \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{\sin(\pi x)}{2^{b-1}}\right|\right) = \ln\left(|\sin(\pi x)|\right) - \ln(2^{b-1}) = \Lambda(\pi x) - (b-1)\ln(2). \end{cases}$$

Par opérations et à l'aide de la question 4, les fonctions φ *et* ψ *sont dérivables, donc l'égalité* $\varphi = \psi$ *entraîne* $\varphi' = \psi'$*, c'est-à-dire*

$$\forall x \in D, \frac{\pi}{b} \sum_{s=0}^{b-1} \cot\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) = \pi \cot(\pi x),$$

ce qui est clairement équivalent à l'égalité demandée.

Partie II. Une représentation des fonctions b-périodiques $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Dans toute cette partie, on fixe un entier $b \in \mathbb{N}^*$.

On étend la notion de fonction b-périodique à des fonctions $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est donc dite b-*périodique* si $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n+b) = f(n)$.

On rappelle qu'étant donné une assertion A, on note $\mathbb{1}_{(A)} = \begin{cases} 1 & \text{si A est vraie} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En particulier, si n et $m \in \mathbb{Z}$, le nombre $\mathbb{1}_{(n \equiv m \pmod b)}$ (que l'on pourra ici noter simplement $\mathbb{1}_{(n\equiv m)}$) vaut 1 si n et m sont congrus modulo b, c'est-à-dire si $n - m$ est un multiple de b, et 0 sinon.

9. Soit $c_0, \dots, c_{b-1} \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{C} \\ n \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{b-1} c_k\, \zeta^{kn} \end{cases}$ est b-périodique.

   C'est un calcul direct.

   - *Commençons par remarquer que, pour tout $k \in [\![0, b-1]\!]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a la chaîne d'égalités $\zeta^{k(n+b)} = \zeta^{kn+kb} = \zeta^{kn}(\zeta^b)^n = \zeta^{kn}$.*
   - *Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

   $$f(n+b) = \sum_{k=0}^{b-1} c_k\, \zeta^{k(n+b)} = \sum_{k=0}^{b-1} c_k\, \zeta^{kn} = f(n),$$

   ce qui conclut.

10. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction b-périodique. Montrer $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{b-1} f(j)\, \mathbb{1}_{(n\equiv j)}$.

    Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit n_0 l'unique élément de $[\![0, b-1]\!]$ tel que $n \equiv n_0 \pmod b$. On a alors « l'effondrement »

    $$\sum_{j=0}^{b-1} f(j) \underbrace{\mathbb{1}_{(n\equiv j)}}_{=0 \textit{ si } j \neq n_0} = f(n_0)\mathbb{1}_{(n\equiv n_0)} = f(n_0).$$

    Comme f est b-périodique et que $n \equiv n_0 \pmod b$, on a $f(n_0) = f(n)$, ce qui conclut.

11. Soit $a \in \mathbb{Z}$.

    (a) Montrer que $\zeta^a = 1$ si et seulement si a est un multiple de b.

    On a la chaîne d'équivalences

    $$\zeta^a = 1 \Leftrightarrow \exp\left(i\frac{2\pi}{b}a\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{b}a \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod b,$$

    et cette dernière condition est clairement équivalente au fait que a est un multiple de b.

    (b) Calculer la somme $\Sigma(a) = \dfrac{1}{b}\displaystyle\sum_{j=0}^{b-1} \zeta^{aj}$ en fonction de a.

    - *Si a est un multiple de b, on a $\zeta^a = 1$ d'après la question précédente, puis $\Sigma(a) = \dfrac{1}{b}\displaystyle\sum_{j=0}^{b-1} 1^j = 1$.*

- *Sinon, le nombre* ζ^a *est différent de* 1*, et on peut appliquer la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique :*

$$\Sigma(a) = \frac{1}{b}\sum_{j=0}^{b-1}(\zeta^a)^j = \frac{1}{b}\frac{1-(\zeta^a)^b}{1-\zeta^a} = 0,$$

  car $(\zeta^a)^b = \zeta^{ab} = (\zeta^b)^a = 1^a = 1$.

Pour faire chic, $\Sigma(a) = \mathbb{1}_{(a\equiv 0)}$.

12. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction b-périodique. Pour tout $k \in [\![0, b-1]\!]$, on définit $\varphi_k = \frac{1}{b}\sum_{j=0}^{b-1} f(j)\,\zeta^{-jk}$.

Montrer la *formule de synthèse de Fourier* :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \sum_{k=0}^{b-1}\varphi_k\,\zeta^{kn}.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$*. On a*

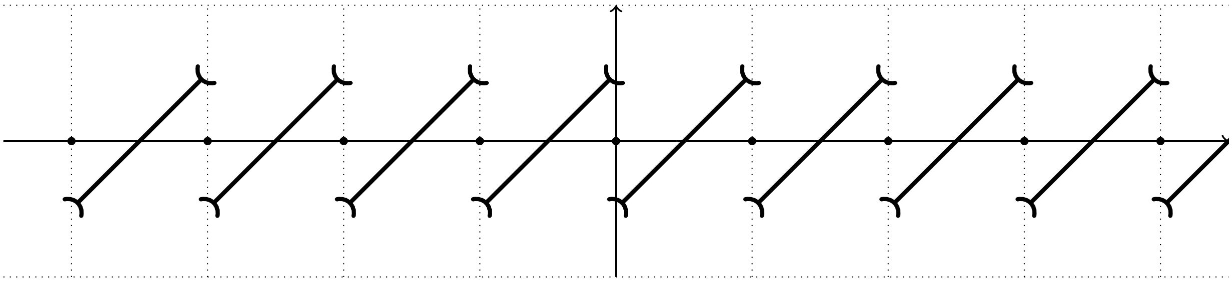
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{b-1}\varphi_k\,\zeta^{kn} &= \sum_{k=0}^{b-1}\left(\frac{1}{b}\sum_{j=0}^{b-1} f(j)\,\zeta^{-jk}\right)\zeta^{kn} \\
&= \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1}\sum_{j=0}^{b-1} f(j)\,\zeta^{-jk}\,\zeta^{kn} \\
&= \frac{1}{b}\sum_{j=0}^{b-1}\sum_{k=0}^{b-1} f(j)\,\zeta^{(n-j)k} \\
&= \sum_{j=0}^{b-1} f(j)\underbrace{\left(\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1}\zeta^{(n-j)k}\right)}_{=\Sigma(n-j)=\mathbb{1}_{(n-j\equiv 0)}} \\
&= \sum_{j=0}^{b-1} f(j)\,\mathbb{1}_{(n\equiv j)} \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

d'après la question 10.

Partie III. Sommes de Dedekind.

Dans cette partie, on définit une fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en imposant :

- que w soit 1-périodique ;
- que $w(0) = 0$ (ce qui force $\forall n \in \mathbb{Z}, w(n) = 0$) ;
- que $\forall t \in \,]0, 1[\, , w(t) = t - \dfrac{1}{2}$.



Le graphe de w.

Pour deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on définit alors

$$s(a, b) = \sum_{\ell=0}^{b-1} w\left(\frac{\ell}{b}\right) w\left(\frac{a\ell}{b}\right).$$

13. Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Calculer $s(1, b)$.

On a

$$\begin{aligned}
s(1, b) &= \sum_{\ell=1}^{b-1} \left(\frac{\ell}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \sum_{\ell=1}^{b-1} \left(\frac{2\ell - b}{2b}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4b^2} \sum_{\ell=1}^{b-1} (2\ell - b)^2 \\
&= \frac{1}{4b^2} \sum_{\ell=1}^{b-1} 4\ell^2 - \frac{1}{4b^2} \sum_{\ell=1}^{b} 4\ell b + \frac{1}{4b^2} \sum_{\ell=1}^{b-1} b^2 \\
&= \frac{(b-1)b(2b-1)}{6b^2} - \frac{(b-1)b^2}{2b^2} + \frac{(b-1)b^2}{4b^2} \\
&= \frac{(b-1)(2b-1)}{6b} - \frac{b-1}{2} + \frac{b-1}{4} \\
&= \frac{2b^2 - 3b + 1}{6b} - \frac{b-1}{4} \\
&= \frac{b}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6b} - \frac{b}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{b}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6b}.
\end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, on applique la partie précédente à la fonction $n \mapsto w\left(\dfrac{n}{b}\right)$, qui est bien n-périodique (on ne demande pas de le démontrer). On pose donc, pour tout $k \in [\![0, b-1]\!]$,

$$\varphi_k = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} w\left(\frac{j}{b}\right) \zeta^{-jk}.$$

14. Calculer le coefficient φ_0.

On a

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{1}{b}\sum_{j=0}^{b-1} w\left(\frac{j}{b}\right)\\ &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b-1}\left(\frac{j}{b}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b-1} j - \frac{b-1}{2}\right]\\ &= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{b}\frac{(b-1)b}{2} - \frac{b-1}{2}\right] = 0.\end{aligned}$$

15. Soit $\xi \in \mathbb{U}_b$. On note $S(\xi) = \sum_{j=0}^{b-1} j\,\xi^j$.

(a) Calculer $(\xi-1)S(\xi) + \sum_{j=0}^{b-1} \xi^{j+1}$ en se ramenant à une somme télescopique.

On a

$$\begin{aligned}(\xi-1)S(\xi) + \sum_{j=0}^{b-1}\xi^j &= \sum_{j=0}^{b-1}\left(j\,\xi^{j+1} - j\,\xi^j\right) + \sum_{j=0}^{b-1}\xi^{j+1}\\ &= \sum_{j=0}^{b-1}\left((j+1)\,\xi^{j+1} - j\,\xi^j\right)\\ &= b\,\xi^b - 0\,\xi^0 && \textit{(par télescopage)}\\ &= b.\end{aligned}$$

(b) En déduire une expression de $S(\xi)$, dans le cas $\xi \neq 1$.

Si $\xi \neq 1$, le même genre d'arguments qu'à la question 11b montre que $\sum_{j=0}^{b-1}\xi^j = 0$, si bien que l'on obtient $(\xi-1)S(\xi) = b$, puis $S(\xi) = \dfrac{b}{\xi-1}$.

16. Pour $k \in [\![1, b-1]\!]$, calculer le coefficient φ_k.

Soit $k \in [\![1, b-1]\!]$. On a donc $\zeta^{-k} = \overline{\zeta^k} \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \frac{1}{b}\sum_{j=0}^{b-1} w\left(\frac{j}{b}\right)\zeta^{-jk}\\ &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b-1}\left(\frac{j}{b}-\frac{1}{2}\right)\zeta^{-jk}\\ &= \frac{1}{b^2}\underbrace{\sum_{j=1}^{b-1} j\,\zeta^{-jk}}_{=S(\zeta^{-k})} - \frac{1}{2b}\underbrace{\sum_{j=1}^{b-1}\zeta^{-jk}}_{=b\Sigma(-k)-\zeta^0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b^2}\frac{b}{\zeta^{-k}-1} + \frac{1}{2b} \\
&= \frac{1}{2b}\left(\frac{2}{\zeta^{-k}-1} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2b}\left(\frac{2\zeta^k}{1-\zeta^k} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2b}\frac{1+\zeta^k}{1-\zeta^k}.
\end{aligned}$$

17. Déduire de ce qui précède la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z}, w\left(\frac{n}{b}\right) = \frac{1}{2b}\sum_{k=1}^{b-1}\frac{1+\zeta^k}{1-\zeta^k}\zeta^{kn}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer la question 12 !

Partie IV. Loi de réciprocité.

Jusqu'à la fin du devoir, $a, b \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers premiers entre eux.

18. (a) Montrer $s(a,b) = \dfrac{1}{4b}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{b-1}\frac{1+\zeta^\ell}{1-\zeta^\ell}\frac{1+\zeta^{-a\ell}}{1-\zeta^{-a\ell}}$.

En développant grâce à la question précédente :

$$\begin{aligned}
s(a,b) &= \sum_{j=0}^{b-1} w\left(\frac{j}{b}\right) w\left(\frac{aj}{b}\right) \\
&= \frac{1}{4b^2}\sum_{j=0}^{b-1}\left(\sum_{k=1}^{b-1}\frac{1+\zeta^k}{1-\zeta^k}\zeta^{kj}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{b-1}\frac{1+\zeta^\ell}{1-\zeta^\ell}\zeta^{\ell j}\right) \\
&= \frac{1}{4b}\sum_{k=1}^{b-1}\sum_{\ell=1}^{b-1}\frac{1+\zeta^k}{1-\zeta^k}\frac{1+\zeta^\ell}{1-\zeta^\ell}\left(\frac{1}{b}\sum_{j=0}^{b-1}\zeta^{(k+a\ell)j}\right) \\
&= \frac{1}{4b}\sum_{\ell=1}^{b-1}\sum_{k=1}^{b-1}\frac{1+\zeta^k}{1-\zeta^k}\frac{1+\zeta^\ell}{1-\zeta^\ell}\Sigma(k+a\ell).
\end{aligned}$$

C'est là que l'hypothèse de coprimalité de a *et* b *intervient. D'après la question 11b, la somme* $\Sigma(k+a\ell)$ *vaut* 0*, sauf si* $k+a\ell \equiv 0 \pmod b$*, c'est-à-dire si* $k \equiv -a\ell \pmod b$*. On sait qu'il existe un unique entier* $k_\ell \in [\![0, b-1]\!]$ *tel que* $k_\ell \equiv -a\ell \pmod b$*. Remarquons :*

- *que pour cet entier, on a* $\zeta^{k_\ell} = \zeta^{-a\ell}$*, par* b*-périodicité de la fonction* $n \mapsto \zeta^n$ *;*
- *surtout, que cet entier* k_ℓ *appartient en fait à* $[\![1, b-1]\!]$*.*

  En effet, $k_\ell = 0$ *entraînerait* $-a\ell \equiv 0 \pmod b$*, c'est-à-dire que* b *diviserait* $a\ell$*. Or, puisque* a *est premier avec* b*, le lemme de Gauss entraînerait que* b *divise* ℓ*, ce qui est impossible car* $\ell \in [\![1, b-1]\!]$*.*

Ainsi, notre somme « s'effondre » :

$$s(a,b) = \frac{1}{4b}\sum_{\ell=1}^{b-1} \frac{1+\zeta^{k_\ell}}{1-\zeta^{k_\ell}}\frac{1+\zeta^{\ell}}{1-\zeta^{\ell}} = \frac{1}{4b}\sum_{\ell=1}^{b-1} \frac{1+\zeta^{-a\ell}}{1-\zeta^{-a\ell}}\frac{1+\zeta^{\ell}}{1-\zeta^{\ell}},$$

ce qui conclut.

(b) En déduire $s(a,b) = \dfrac{1}{4b}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)\cot\left(\frac{\pi a\ell}{b}\right)$.

En utilisant la question 5, il vient immédiatement

$$\begin{aligned} s(a,b) &= \frac{1}{4b}\sum_{\ell=1}^{b-1} i\,\cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)\ i\,\cot\left(-\frac{\pi a\ell}{b}\right) \\ &= -\frac{1}{4b}\sum_{\ell=1}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)\ \cot\left(-\frac{\pi a\ell}{b}\right) \\ &= \frac{1}{4b}\sum_{\ell=1}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)\ \cot\left(\frac{\pi a\ell}{b}\right), \end{aligned}$$

par imparité (claire, par opérations) de la fonction cot.

19. La formule de la question 8 reste valable après avoir remplacé b par a. En l'appliquant au facteur $\cot\left(\dfrac{\pi a\ell}{b}\right)$ de la somme précédente, montrer la *loi de réciprocité des sommes de Dedekind :*

$$s(a,b)+s(b,a) = \frac{1}{12}\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{4}.$$

Considérons d'abord $s(a,b)$. *On suit l'indication de l'énoncé en écrivant, pour tout* $\ell \in [\![0, b-1]\!]$,

$$\begin{aligned} \cot\left(\frac{\pi a\ell}{b}\right) &= \frac{1}{a}\sum_{s=0}^{a-1} \cot\left(\frac{\frac{a\ell}{b}+s}{a}\pi\right) \\ &= \frac{1}{a}\sum_{s=0}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}+\frac{\pi s}{a}\right) \\ \textit{donc} \qquad s(a,b) &= \frac{1}{4ab}\sum_{\ell=1}^{b-1}\sum_{s=0}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)\cot\left(\frac{\pi\ell}{b}+\frac{\pi s}{a}\right) \\ \textit{et symétriquement} \qquad s(b,a) &= \frac{1}{4ab}\sum_{s=1}^{a-1}\sum_{\ell=0}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi s}{a}\right)\cot\left(\frac{\pi s}{a}+\frac{\pi\ell}{b}\right) \\ \textit{donc} \qquad s(a,b)+s(b,a) &= \frac{1}{4ab}\left[S+S'+S''\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{où} \qquad S &= \sum_{s=1}^{a-1}\sum_{\ell=1}^{b-1}\left(\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right)+\cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)\right)\cot\left(\frac{\pi s}{a}+\frac{\pi\ell}{b}\right), \\ S' &= \sum_{\ell=1}^{b-1}\cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)^2 = 4b\,s(1,b) \\ S'' &= \sum_{s=1}^{b-1}\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right)^2 = 4a\,s(1,a). \end{aligned}$$

Il reste à calculer la double somme S*. Cela se simplifie grandement :*

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{s=1}^{a-1}\sum_{\ell=1}^{b-1}\left(\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right)+\cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)\right)\cot\left(\frac{\pi s}{a}+\frac{\pi\ell}{b}\right),\\
&= \sum_{s=1}^{a-1}\sum_{\ell=1}^{b-1}\left(\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right)\cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)-1\right) && \textit{(formule d'addition)}\\
&= -(a-1)(b-1),
\end{aligned}$$

car la symétrie (facile à montrer) $\forall t\in D, \cot(\pi-t)=-\cot(t)$ *et un changement d'indices permettent de montrer que la somme sur* s *est égale à son opposée, et donc nulle :*

$$\sum_{s=1}^{a-1}\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right)=\sum_{\sigma=1}^{a-1}\cot\left(\frac{\pi(a-\sigma)}{a}\right)=\sum_{\sigma=1}^{a-1}\cot\left(\pi-\frac{\pi\sigma}{a}\right)=-\sum_{\sigma=1}^{a-1}\cot\left(\frac{\pi\sigma}{a}\right)=-\sum_{s=1}^{a-1}\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right).$$

In fine,

$$\begin{aligned}
s(a,b)+s(b,a) &= \frac{-(a-1)(b-1)+4a\,s(1,a)+4b\,s(1,b)}{4ab}\\
&= -\frac{1}{4}+\frac{ab-(a-1)(b-1)}{4ab}+\frac{s(1,a)}{b}+\frac{s(1,b)}{a}\\
&= -\frac{1}{4}+\frac{a+b-1}{4ab}+\frac{1}{b}\left(-\frac{1}{4}+\frac{a}{12}+\frac{1}{6a}\right)+\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{4}+\frac{b}{12}+\frac{1}{6b}\right)\\
&= -\frac{1}{4}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4ab}-\frac{1}{4b}+\frac{a}{12b}+\frac{1}{6ab}-\frac{1}{4a}+\frac{b}{12a}+\frac{1}{6ab}\\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

ce qui conclut ce beau calcul.