Troisième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****. Vous pouvez en revanche utiliser librement le formulaire de développements limités de la dernière page.*

L'utilisation abusive des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ en lieu et place de « donc », « c'est-à-dire », etc. sera sanctionnée.

Le sujet est encore plus infinissable que d'habitude. Attachez-vous à bien faire les questions que vous entreprenez. Notamment, les deux exercices auront un poids élevé dans la notation, sans doute proche de la moitié du barème.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci $\boxed{\text{d'encadrer}}$ ou de souligner vos résultats. Je me réserve le droit de ne pas lire les parties de votre copie qui contreviendront à cette consigne.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$.

1. Soit $u, v \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer $\text{sh}(u+v) = \text{ch}(u)\,\text{sh}(v) + \text{sh}(u)\,\text{ch}(v)$ et $\text{ch}(u+v) = \text{ch}(u)\,\text{ch}(v) + \text{sh}(u)\,\text{sh}(v)$.
   (b) Exprimer $\text{th}(u+v)$ en fonction de $\text{th}(u)$ et $\text{th}(v)$.
   (c) En déduire $\forall t \in \mathbb{R}, \text{th}(2t) = \dfrac{2\,\text{th}(t)}{1 + \text{th}^2(t)}$.
2. (a) Effectuer un $DL_5(0)$ de th.
   (b) En déduire un équivalent de th au voisinage de 0, puis la valeur de $\ell = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{th}(t)}{t}$.
   On pourra dans la fin de l'exercice utiliser sans démonstration un résultat de composition des limites : si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls converge vers 0, alors $\dfrac{\text{th}(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. (a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(1 + \text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)$.
   (b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, S_n(x) = \ln\left(2^n\,\text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\text{th}(x)\right)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

Exercice 2

1. Écrire sans démonstration $D_{\tan} = \cos^{-1}[\mathbb{R}^*]$ comme une réunion (infinie) d'intervalles.
2. On définit la fonction *sécante* $\sec : \begin{cases} D_{\tan} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\cos(x)} \end{cases}$.
   Montrer que sec et tan sont lisses sur $D_{\tan}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Une fonction lisse $f : I \to \mathbb{R}$ sera dite *absolument monotone (sur* I*)* si $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

On rappelle que, quand $n = 0$, la notation $f^{(n)}$ désigne la fonction f elle-même.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\tau \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $x \mapsto e^{\tau x}$ soit absolument monotone sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction arctan est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+$?
5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion « il existe des entiers naturels $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ tels que $\forall x \in D_{\tan}, \tan^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \tan(x)^k$. »
   Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence.
   (b) En déduire que la fonction tan est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
6. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument monotones.
   (a) Montrer que $f + g$ est absolument monotone.
   (b) Montrer que fg est absolument monotone.
   (c) Montrer (par exemple, par récurrence) que $\exp \circ f$ est absolument monotone.
7. Montrer que sec est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Problème. Loi de réciprocité pour les sommes de Dedekind.

Dans tout le problème, b désignera un entier strictement positif.

On notera alors systématiquement $\zeta = \zeta_b = \exp\left(i\frac{2\pi}{b}\right)$.

Partie I. La fonction cotangente.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $\cot : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
2. Montrer $\forall x \in D, \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$ et tracer le graphe de cot.
3. Résoudre l'équation $\cot(x) = \sqrt{3}$, d'inconnue $x \in D$.
4. Montrer que la fonction $\Lambda : \begin{cases} D \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(|\sin(x)|\right) \end{cases}$ est dérivable, et calculer sa dérivée.
5. Soit $b \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, b-1]\!]$. Calculer $\dfrac{1+\zeta^k}{1-\zeta^k}$ en fonction de cot.
6. Soit $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 + x_2 \in D$. Exprimer $\cot(x_1 + x_2)$ en fonction de $\cot(x_1)$ et $\cot(x_2)$.
7. Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Le but de cette question est d'établir la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) = \frac{1}{2^{b-1}} \sin(\pi x).$$

   Pour cela, on admettra la factorisation

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^b - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_b} (z - \omega), \tag{☼}$$

   que le cours sur les polynômes permettra de déduire du fait que l'ensemble $\mathbb{U}_b$ des racines b-ièmes de l'unité est précisément l'ensemble des racines du polynôme $X^b - 1$.

   (a) En utilisant la factorisation (☼), montrer $\forall x \in \mathbb{R}, e^{i\,2\pi x} - 1 = \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s}\right)$.

   (b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression simplifiée du produit $\prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{\pi}{b}(x+s)} - e^{-i\frac{\pi}{b}(x+s)}\right)$.

   (c) Conclure.

8. Déduire de la question précédente $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \cot(\pi x) = \dfrac{1}{b} \sum_{s=0}^{b-1} \cot\left(\frac{x+s}{b}\pi\right)$.

Partie II. Une représentation des fonctions b-périodiques $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Dans toute cette partie, on fixe un entier $b \in \mathbb{N}^*$.

On étend la notion de fonction b-périodique à des fonctions $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est donc dite b-*périodique* si $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n+b) = f(n)$.

On rappelle qu'étant donné une assertion A, on note $\mathbb{1}_{(A)} = \begin{cases} 1 & \text{si A est vraie} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En particulier, si n et $m \in \mathbb{Z}$, le nombre $\mathbb{1}_{(n \equiv m \pmod b)}$ (que l'on pourra ici noter simplement $\mathbb{1}_{(n\equiv m)}$) vaut 1 si n et m sont congrus modulo b, c'est-à-dire si $n - m$ est un multiple de b, et 0 sinon.

9. Soit $c_0, \dots, c_{b-1} \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{C} \\ n \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{b-1} c_k\, \zeta^{kn} \end{cases}$ est b-périodique.

10. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction b-périodique. Montrer $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{b-1} f(j)\, \mathbb{1}_{(n\equiv j)}$.

    Indication. *On pourra utiliser sans démonstration le fait que tout élément de $\mathbb{Z}$ est congru modulo b à un unique élément de $[\![0, b-1]\!]$ (à savoir le reste dans la division euclidienne de n par b).*

11. Soit $a \in \mathbb{Z}$.

    (a) Montrer que $\zeta^a = 1$ si et seulement si a est un multiple de b.

    (b) Calculer la somme $\Sigma(a) = \dfrac{1}{b} \displaystyle\sum_{j=0}^{b-1} \zeta^{aj}$ en fonction de a.

12. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction b-périodique. Pour tout $k \in [\![0, b-1]\!]$, on définit $\varphi_k = \dfrac{1}{b} \displaystyle\sum_{j=0}^{b-1} f(j)\, \zeta^{-jk}$.

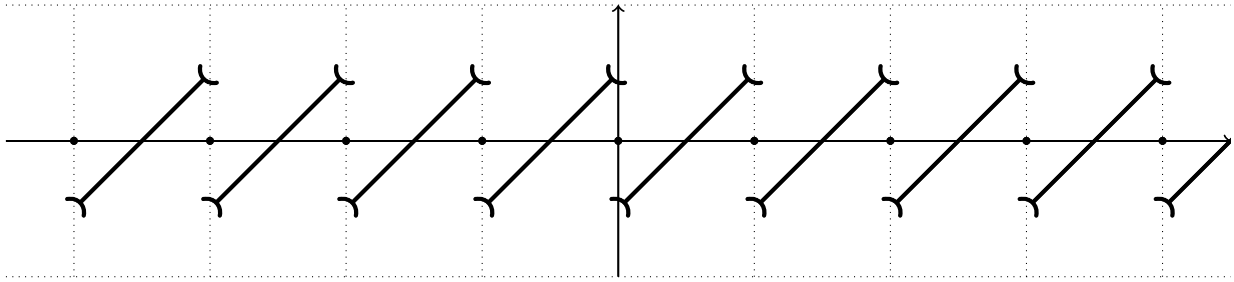
    Montrer la *formule de synthèse de Fourier* :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \sum_{k=0}^{b-1} \varphi_k\, \zeta^{kn}.$$

Partie III. Sommes de Dedekind.

Dans cette partie, on définit une fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en imposant :

- que w soit 1-périodique ;
- que $w(0) = 0$ (ce qui force $\forall n \in \mathbb{Z}, w(n) = 0$) ;
- que $\forall t \in \,]0, 1[\,, w(t) = t - \dfrac{1}{2}$.



Le graphe de w.

Pour deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on définit alors

$$s(a, b) = \sum_{\ell=0}^{b-1} w\left(\frac{\ell}{b}\right) w\left(\frac{a\ell}{b}\right).$$

13. Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Calculer $s(1, b)$.
    On donnera la réponse sous la forme $\lambda b + \kappa + \dfrac{\mu}{b}$*, pour certaines constantes* λ, κ, μ.

Dans la suite de cette partie, on applique la partie précédente à la fonction $n \mapsto w\left(\dfrac{n}{b}\right)$, qui est bien n-périodique (on ne demande pas de le démontrer). On pose donc, pour tout $k \in [\![0, b-1]\!]$,

$$\varphi_k = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} w\left(\frac{j}{b}\right) \zeta^{-jk}.$$

14. Calculer le coefficient φ_0.
15. Soit $\xi \in \mathbb{U}_b$. On note $S(\xi) = \displaystyle\sum_{j=0}^{b-1} j\, \xi^j$.
    (a) Calculer $(\xi - 1)S(\xi) + \displaystyle\sum_{j=0}^{b-1} \xi^{j+1}$ en se ramenant à une somme télescopique.
    (b) En déduire une expression de $S(\xi)$, dans le cas $\xi \neq 1$.
16. Pour $k \in [\![1, b-1]\!]$, calculer le coefficient φ_k.
17. Déduire de ce qui précède la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z}, w\left(\frac{n}{b}\right) = \frac{1}{2b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^k}{1 - \zeta^k} \zeta^{kn}.$$

Partie IV. Loi de réciprocité.

Jusqu'à la fin du devoir, $a, b \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers premiers entre eux.

18. (a) Montrer $s(a,b) = \dfrac{1}{4b}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{b-1} \dfrac{1+\zeta^\ell}{1-\zeta^\ell}\dfrac{1+\zeta^{-a\ell}}{1-\zeta^{-a\ell}}$.

    (b) En déduire $s(a,b) = \dfrac{1}{4b}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{b-1} \cot\left(\dfrac{\pi\ell}{b}\right)\cot\left(\dfrac{\pi a\ell}{b}\right)$.

19. La formule de la question 8 reste valable après avoir remplacé b par a. En l'appliquant au facteur $\cot\left(\dfrac{\pi a\ell}{b}\right)$ de la somme précédente, montrer la *loi de réciprocité des sommes de Dedekind :*

$$s(a,b) + s(b,a) = \frac{1}{12}\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{ab} + \frac{b}{a}\right) - \frac{1}{4}.$$

Formulaire de développements limités

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\ ;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\ ;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \textit{où} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}^{k\ \textit{facteurs}}}{k!}\ ;$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\ ;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\ ;$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})\ ;$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\ ;$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})\ ;$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})\ ;$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})\ ;$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})\ ;$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$