Quatrième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1. Les DL du vendredi.

1. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2\exp(x^2)}$.

   On a

$$\begin{aligned}
& & \exp(x^2) &= 1 + x^2 + o(x^2) \\
&\textit{donc} & 1 + x^2\exp(x^2) &= 1 + x^2 + x^4 + o(x^4) \\
&\textit{donc} & f(x) &= \frac{1}{1 + x^2 + x^4 + o(x^4)} \\
& & &= 1 - \big(x^2 + x^4 + o(x^4)\big) + \big(x^2 + o(x^2)\big)^2 + o(x^4) \\
& & &\qquad \textit{car} \begin{cases} \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ x^2 + x^4 + o(x^4) \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \end{cases} \\
& & &= 1 - x^2 + o(x^4).
\end{aligned}$$

2. Calculer le $DL_4(0)$ de $g : x \mapsto x\ln\big(\cos(x) + \mathrm{sh}(x)\big)$.

   On a

$$\begin{aligned}
\ln\big(\cos(x) + \mathrm{sh}(x)\big) &= \ln\left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + \frac{1}{3}\big(x + o(x)\big)^3 + o(x^3) \\
&\qquad \textit{car} \begin{cases} \ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3) \\ x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x \end{cases} \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 \qquad \textit{car} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 = x^2 - x^3 + o(x^3) \\
&\quad + \frac{1}{3}x^3 \\
&= x - x^2 + x^3 + o(x^3), \\
\textit{donc} \qquad g(x) &= x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Exercice 2. Deux inégalités.

1. (a) Soit $\varphi :]0,1[\to]0,1[$.
Montrer que φ est convexe si et seulement si $\widehat{\varphi} : x \mapsto \varphi(1-x)$ est convexe.

Sens direct. *Supposons φ convexe. Montrons $\widehat{\varphi} : x \mapsto \varphi(1-x)$ convexe.*
Soit $x_1, x_2 \in]0,1[$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) &= \varphi\big(1-(1-\lambda)x - \lambda y\big) \\
&= \varphi\big((1-\lambda) + \lambda - (1-\lambda)x - \lambda y\big) \\
&= \varphi\big((1-\lambda)(1-x) + \lambda(1-y)\big) \\
&\leqslant (1-\lambda)\varphi(1-x) + \lambda\varphi(1-y) && \textit{(par convexité de } \varphi\textit{)} \\
&\leqslant (1-\lambda)\widehat{\varphi}(x) + \lambda\widehat{\varphi}(y).
\end{aligned}$$

Sens réciproque. *Supposons $\widehat{\varphi}$ convexe.*
D'après ce qui précède, $\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi$ est convexe, ce qui conclut.

(b) Montrer que la fonction $f : \begin{cases}]0,1[\to & \mathbb{R} \\ x \quad \mapsto & \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} \end{cases}$ est convexe.

Montrons que $\widehat{f} : x \mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} - x^{1/2}$ est convexe.
Cette fonction est lisse sur $\mathbb{R}_+^*$, par opérations, et sa dérivée seconde est

$$x \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = \frac{3}{4}x^{-5/2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Cette expression montre que la dérivée seconde de $\widehat{f}$ est positive, et on en déduit que $\widehat{f}$ est convexe.
D'après la question précédente, f est convexe.

(c) Soit $n \geqslant 2$ et $x_1, \dots, x_n \in]0,1[$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

On applique l'inégalité de Jensen à la fonction convexe f et à ces n nombres. On en déduit :

$$\frac{1}{n}\big(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\big) \geqslant f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} &= f(x_1) + \cdots + f(x_n) \\
&\geqslant n\, f\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}$$

2. (a) En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, déterminer le minimum de la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & u+v+\dfrac{1}{uv}. \end{cases}$$

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. *On a, d'après l'inégalité arithmético-géométrique :*

$$g(u,v) = u+v+\frac{1}{uv} = 3\left(\frac{u+v+\frac{1}{uv}}{3}\right) \geqslant 3\sqrt[3]{uv\frac{1}{uv}} = 3.$$

Par ailleurs, $g(1,1) = 1+1+\dfrac{1}{1\times 1} = 3$, *donc le minimum de la fonction* g *vaut bien* 3.

(b) En déduire que la fonction $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4y^2+x^2y^4-3x^2y^2+1 \end{cases}$ est à valeurs positives.

Déjà, $h(x,y) = 1$ *dès que* $x = 0$ *ou* $y = 0$. *Il suffit donc de montrer* $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, h(x,y) \geqslant 0$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}^*$. *On a*

$$h(x,y) = x^2y^2\left(x^2+y^2-3+\frac{1}{x^2y^2}\right) = x^2y^2\Big(g(x^2,y^2)-3\Big) \geqslant 0$$

d'après la question précédente, car x^2 *et* $y^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. Un dessin.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Que dire ?

Un dessin semble indiquer que la fonction f *va etre nulle sur* $[-1,1]$. *Montrons-le.*

Soit $x \in [-1,1]$.

- *Supposons dans un premier temps* $x \in [0,1]$.
  - *On commence par exploiter le fait que* x *est entre* 0 *et* 1 *pour montrer* $f(x) \leqslant 0$. *Par convexité,*

    $$f(x) = f\big((1-x)\,0 + x\,1\big) \leqslant (1-x)\,f(0) + x\,f(1) = 0.$$

  - *Exploitons maintenant le fait que* 0 *est entre* -1 *et* x *pour montrer* $f(x) \geqslant 0$. *Par convexité,*

    $$\begin{aligned} 0 = f(0) &= f\left(\left(1-\frac{1}{1+x}\right)(-1) + \frac{1}{1+x}x\right) \\ &\leqslant \left(1-\frac{1}{1+x}\right)f(-1) + \frac{1}{1+x}f(x) = \frac{1}{1+x}f(x). \end{aligned}$$

    Cela montre $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x}f(x)$, *et donc* $f(x) \geqslant 0$, *car* $1+x \geqslant 0$.

    Remarque. *La valeur* $\dfrac{1}{1+x}$ *peut sembler parachutée dans le calcul précédent, mais il n'en est rien. Quand on va de* -1 *à* x, *on a un trajet de longueur* $1+x$ *à effectuer. Arrivé en* 0, *on a déjà parcouru une longueur de* 1, *c'est-à-dire une proportion* $\lambda = \dfrac{1}{1+x}$ *du trajet.*

  Cela montre $f(x) = 0$.
- *Le cas* $x \in [-1,0]$ *est en tout point similaire.*

Problème. Une suite de polynômes adaptée à un opérateur différentiel.

Dans tout ce problème, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes réels

$$Q_n = (X^2-1)^n \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{1}{2^n\, n!} Q_n^{(n)}.$$

Partie I. Propriétés de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculer L_0 et L_1. Vérifier que $L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.

   On a

   - $Q_0 = (X^2-1)^0 = 1$, *donc* $L_0 = \frac{1}{2^0 \cdot 0!} Q_0^{(0)} = 1$.
   - $Q_1 = X^2 - 1$, *donc* $L_1 = \frac{1}{2^1 \cdot 1!} Q_1' = \frac{2X}{2} = X$.
   - $Q_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$, *donc* $L_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} Q_2'' = \frac{1}{8}(12X^2 - 4) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme Q_n.

   Le degré d'un produit étant la somme des degrés, le degré de Q_n *est* $n \deg(X^2-1) = 2n$.
   Le coefficient dominant d'un produit étant le produit des coefficients dominants, le coefficient dominant de Q_n *est* $\mathrm{coeff}_{2n}(Q_n) = \left(\mathrm{coeff}_2(X^2+1)\right)^n = 1^n = 1$.

   (b) En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme L_n.

   D'après la question précédente, on peut trouver un polynôme R_n *de degré* $< 2n$ *tel que l'on puisse écrire* $Q_n = X^{2n} + R_n$.
   Après dérivation n*-uple, on a donc* $Q_n^{(n)} = (2n)\cdots(n+1)X^n + R_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}X^n + R_n^{(n)}$, *puis*

   $$L_n = \frac{1}{2^n\, n!} Q_n^{(n)} = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{(2n)!}{n!}X^n + \frac{1}{2^n\, n!} R_n^{(n)}.$$

   On sait que $\deg R_n^{(n)} \leqslant \deg R_n - n < n$, *donc ce calcul montre que* L_n *est de degré* n *et de coefficient dominant*

   $$\frac{1}{2^n\, n!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer rapidement la parité de la fonction polynomiale $x \mapsto L_n(x)$.

   La fonction $x \mapsto Q_n(x)$ *est manifestement paire, par opérations.*
   La dérivation envoyant les fonctions paires sur les fonctions impaires, et réciproquement, on en déduit que $Q_n^{(n)}$, *et donc* L_n, *sont « de la même parité que* n *».*

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) En écrivant $Q_n = (X-1)^n\,(X+1)^n$, exprimer L_n comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme $(X-1)^{n-k}(X+1)^k$ (pour k variant entre 0 et n).

   On applique la formule de Leibniz :

   $$Q_n^{(n)} = \left[(X-1)^n\,(X+1)^n\right]^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[(X-1)^n\right]^{(k)} \left[(X+1)^n\right]^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{n \cdots (n-k+1)}_{=n!/(n-k)!}(X-1)^{n-k} \underbrace{n \cdots (k+1)}_{=n!/k!}(X+1)^k$$

donc $$L_n = \frac{1}{2^n\, n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!^2}{k!(n-k)!}(X-1)^{n-k}(X+1)^k$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

(b) Montrer $L_n(1) = 1$ et déterminer $L_n(-1)$.

On déduit du calcul précédent que

$$L_n(1) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \underbrace{(1-1)^{n-k}}_{=0 \text{ si } k \neq n}(1+1)^k$$

$$= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n}^2 0^0 \cdot 2^n = \frac{2^n}{2^n} = 1.$$

D'après la question 3, on en déduit $L_n(-1) = (-1)^n$.

5. **Racines de L_n.** Soit $n \geqslant 1$.

(a) Déterminer les racines de Q_n, avec leur multiplicité.

L'expression $Q_n = (X-1)^n\,(X+1)^n$ *montre directement que, si* $n \geqslant 1$, *les racines de* Q_n *sont* -1 *et* 1, *avec multiplicité* n *dans les deux cas.*
Naturellement, $Q_0 = 1$ *n'a pas de racine.*

(b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $H(k)$ l'assertion « il existe un réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une liste de k réels $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < 1$ tels que $Q_n^{(k)} = \lambda\,(X^2-1)^{n-k}\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$. »
Montrer $\forall k \in [\![1, n]\!], H(k)$ par récurrence finie.

Initialisation. *On a* $Q_n' = n\,(X^2-1)'(X^2-1)^{n-1} = 2nX(X^2-1)^{n-1}$, *ce qui montre* $H(1)$ *: les réels* $\lambda = 2n$ *et* $\alpha_1 = 0$ *conviennent.*
(On pourrait utiliser un argument moins concret, très semblable à celui de l'hérédité, mais j'ai préféré ici être direct.)

Hérédité. *Soit* $k \in [\![1, n-1]\!]$ *tel que* $H(k)$.
On peut donc trouver $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}^*$ *et* $-1 < \widetilde{\alpha}_1 < \cdots < \widetilde{\alpha}_k < 1$ *tels que*

$$Q_n^{(k)} = \lambda(X^2-1)^{n-k}\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k) = \lambda(X+1)^{n-k}\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)(X-1)^{n-k}.$$

Montrons $H(k+1)$.

- *Comme* $k < n$, *les réels* -1 *et* 1 *sont racines de* $Q_n^{(k)}$, *de multiplicité* $n-k$ *dans les deux cas. On en déduit que*

$$\mu_{\pm 1}(Q_n^{(k+1)}) = \mu_{\pm 1}(Q_n^{(k)}) - 1 = n-k-1 = n-(k+1).$$

- *Soit* $\ell \in [\![1, k-1]\!]$. *En appliquant le théorème de Rolle (sous sa forme faible et provisoire) à la fonction (de classe* C^1*)* $x \mapsto Q_n^{(k)}(x)$ *entre* $\widetilde{\alpha}_\ell$ *et* $\widetilde{\alpha}_{\ell+1}$, *on obtient l'existence d'un nombre réel* $\alpha_{\ell+1} \in \,]\widetilde{\alpha}_\ell, \widetilde{\alpha}_{\ell+1}[$ *tel que* $Q_n^{(k+1)}(\alpha_{\ell+1}) = 0$.
En appliquant le même argument entre -1 *et* $\widetilde{\alpha}_1$ *(resp. entre* $\widetilde{\alpha}_k$ *et* 1*), on obtient une nouvelle racine* α_1 *(resp.* α_{k+1}*) de* $Q_n^{(k+1)}$.

Notons que l'on a les inégalités

$$-1 < \alpha_1 < \widetilde{\alpha}_1 < \alpha_2 < \widetilde{\alpha}_2 < \cdots < \widetilde{\alpha}_{k-1} < \alpha_k < \widetilde{\alpha}_{k+1} < \alpha_{k+1} < 1,$$

ce qui montre notamment que les racines $-1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ *et* 1 *sont distinctes.*
Par le théorème de factorisation, on peut donc trouver $\Lambda \in \mathbb{R}[X]$ *tel que*

$$Q_n^{(k+1)} = (X+1)^{n-(k+1)}(X-1)^{n-(k+1)} \prod_{\ell=1}^{k+1}(X-\alpha_\ell)\,\Lambda = (X^2-1)^{n-(k+1)} \prod_{\ell=1}^{k+1}(X-\alpha_\ell)\Lambda.$$

On a

$$\deg\left[(X^2-1)^{n-(k+1)}\prod_{\ell=1}^{k+1}(X-\alpha_\ell)\right] = 2\big(n-(k+1)\big)+k+1 = 2n-(k+1) = \deg Q_n^{(k+1)}$$

donc on en déduit $\deg \Lambda = 0$ *: on peut donc trouver* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $\Lambda = \lambda$*. Ainsi,*

$$Q_n^{(k+1)} = \lambda(X^2-1)^{n-(k+1)}\prod_{\ell=1}^{k+1}(X-\alpha_\ell),$$

ce qui montre H_{k+1}*, et clôt la récurrence.*

(c) En déduire qu'il existe n réels $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < 1$ tels que

$$L_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1,n]\!], \alpha_k + \alpha_{n+1-k} = 0.$$

D'après $H(n)$*, on peut trouver* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *et* $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < 1$ *tels que*

$$L_n = \lambda\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i). \tag{$\star$}$$

L'expression montre que λ *est nécessairement le coefficient dominant de* L_n*, donc* $\lambda = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n}$.
Il reste simplement à montrer la propriété de symétrie des racines, qui est un reflet de la parité, ou l'imparité suivant les cas, de la fonction $x \mapsto L_n(x)$*.*
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$*, on a*

$$L_n(-\alpha_k) = (-1)^n L_n(\alpha_k) = 0,$$

donc les nombres $-\alpha_n < -\alpha_{n-1} < \cdots < -\alpha_1$ *sont des racines de* L_n*. Comme il y en a* n*, on peut même affirmer qu'il s'agit de toutes les racines de* L_n*. Mais l'expression* ($\star$) *montre que les racines de* L_n *sont* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$*.*
On en déduit donc $\alpha_1 = -\alpha_n$*,* $\alpha_2 = -\alpha_{n-1}$ *et ainsi de suite jusqu'à* $\alpha_n = -\alpha_1$*, ce qui équivaut à l'assertion de l'énoncé.*

(d) À quelle condition le nombre 0 est-il racine de L_n ?

- *Si* n *est impair, l'imparité de* $x \mapsto L_n(x)$ *montre* $L_n(0) = 0$*, c'est-à-dire que* 0 *est racine de* L_n*.*
- *Par ailleurs, la propriété de symétrie vue à la question précédente montre que* L_n *a autant de racines* < 0 *que de racines* > 0*. Il possède en particulier un nombre pair de racines non nulles. Si* 0 *est racine de* P*, le nombre total de racines doit donc être impair. Mais ce nombre est précisément* n*.*

Ainsi, on a montré par double implication que 0 *était racine de* L_n *si et seulement si* n *était impair.*

Partie II. Spectre d'un opérateur différentiel.

Dans cette partie, on considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to & \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto & \Big((X^2-1)P'\Big)' = (X^2-1)P'' + 2X\,P'. \end{cases}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable sous φ, c'est-à-dire que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

   - *Si* $n = 0$, *on a, pour tout* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P' = 0$ *et donc* $\varphi(P) = 0$. A fortiori, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   - *Supposons désormais* $n \geqslant 1$. *On a alors* $\deg P' \leqslant \deg P - 1 \leqslant n-1$, *donc* $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. *On en déduit* $(X^2-1)P' \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ *puis* $\varphi(P) = \Big((X^2-1)P'\Big)' \in \mathbb{R}_n[X]$.

7. Déterminer l'ensemble $\Big\{P \in \mathbb{R}[X] \;\Big|\; \varphi(P) = 0\Big\}$.

   On va montrer $\Big\{P \in \mathbb{R}[X] \;\Big|\; \varphi(P) = 0\Big\} = \mathbb{R}_0[X]$.
   - *L'inclusion réciproque a été montrée à la question précédente.*
   - *Soit* $P \in \Big\{P \in \mathbb{R}[X] \;\Big|\; \varphi(P) = 0\Big\}$. *On va montrer que* P *est constant.*
     Comme $0 = \varphi(P) = \big((X^2-1)P'\big)'$, *on a* $(X^2-1)P'$ *constant. Autrement dit,*

     $$2 + \deg P' = \deg\big((X^2-1)P'\big) \leqslant 0.$$

     Cela entraîne que $\deg P' \leqslant -2$, *c'est-à-dire que* $\deg P' = -\infty$, *ou encore* $P' = 0$.
     Ainsi, le polynôme P *est constant, ce qui conclut.*

8. On veut montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que, pour tout entier naturel n, $\varphi(L_n) = \lambda_n\,L_n$.

   (a) Montrer cette propriété pour $n \in \{0,1,2\}$, en explicitant les λ_n associés.

   Un calcul direct montre que $\varphi(L_0) = 0$, $\varphi(L_1) = 2L_1$ *et* $\varphi(L_2) = 6L_2$, *ce qui montre la propriété demandée, avec* $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 6$.

   (b) On suppose maintenant $n \geqslant 2$.

   i. Montrer $(X^2-1)Q_n' = 2n\,X\,Q_n$.

   C'est un calcul immédiat à partir de $Q_n' = (X^2-1)'\,(X^2-1)^{n-1} = 2X\,(X^2-1)^{n-1}$.

   ii. En dérivant $n+1$ fois la relation précédente, conclure.

   On dérive $n+1$ *fois, en appliquant la formule de Leibniz : comme* $(X^2+1)^{(r)} = 0$ *dès que* $r > 2$ *et que* $X^{(r)} = 0$ *dès que* $r > 1$, *les sommes se simplifient et l'on a :*

   $$\binom{n+1}{0}(X^2-1)\,Q_n^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}2X\,Q_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}2\,Q_n^{(n)} = 2n\binom{n+1}{0}X\,Q_n^{(n+1)} + 2n\binom{n+1}{1}Q_n^{(n)}$$

   $$\textit{donc}\qquad (X^2-1)\,L_n'' + 2(n+1)\,X\,L_n' + n(n+1)\,L_n = 2n\,X\,L_n' + 2n(n+1)L_n$$

   $$\textit{donc}\qquad (X^2-1)\,L_n'' + 2XL_n' = n(n+1)L_n,$$

   c'est-à-dire $\varphi(L_n) = n(n+1)L_n$.
   Cela montre donc la propriété cherchée, en posant $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(n(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, *ce qui est compatible avec les cas* $n \leqslant 2$ *déjà calculés.*

9. On souhaite finalement trouver tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$.

   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ l'assertion

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists!(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : P = \sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k.$$

   Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, B(n)$ par récurrence.

   Initialisation. *Montrons $B(0)$. Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$.*

   Analyse. *Soit $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P = \mu_0 L_0 = \mu_0$.*
   On a donc $\mu_0 = P(0)$.

   Synthèse. *Posons $\mu_0 = P(0)$.*
   Les polynômes $\mu_0 L_0 = \mu_0$ et P sont donc deux polynômes constants possédant la même valeur en 0. On a donc $P = \mu_0 L_0$, ce qui conclut.

   In fine, *il y a un unique tel réel μ_0, à savoir $\mu_0 = P(0)$.*

   Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B(n)$. Montrons $B(n+1)$.*
   Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

   Existence. *Posons $\mu_{n+1} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \operatorname{coeff}_{n+1}(P)$.*
   Les polynômes $\mu_{n+1} L_{n+1}$ et P sont alors deux éléments de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ possédant le même coefficient de degré $n+1$.
   On en déduit que $P - \mu_{n+1} L_{n+1}$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
   D'après $B(n)$, on peut donc trouver $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $P - \mu_{n+1} L_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k$.

   On a donc $P = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k L_k$.

   Unicité. *Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}), (\mu_0, \dots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k L_k = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k L_k$.*
   En examinant le coefficient de degré $n+1$, on a

$$\operatorname{coeff}_{n+1}(P) = \lambda_{n+1} \operatorname{coeff}_{n+1}(L_{n+1}) = \mu_{n+1} \operatorname{coeff}_{n+1}(L_{n+1}).$$

   Comme $\operatorname{coeff}_{n+1}(L_{n+1}) = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \neq 0$, on en déduit $\lambda_{n+1} = \mu_{n+1}$.

   En soustrayant $\lambda_{n+1} L_{n+1} = \mu_{n+1} L_{n+1}$ de part et d'autre de l'égalité $\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k L_k = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k L_k$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k = \sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k,$$

   ce qui donne deux décompositions du même élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
   D'après $B(n)$, on en déduit $\forall k \in [\![0, n]\!], \lambda_k = \mu_k$.
   Ainsi, on a montré $\forall k \in [\![0, n+1]\!], \lambda_k = \mu_k$, ce qui achève la démonstration.

On a ainsi montré

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X], \exists!(\mu_0, \dots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} : P = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k L_k,$$

ce qui montre $H(n+1)$*, et clôt la récurrence.*

(b) Conclure.

Analyse. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tels que* $\varphi(P) = \lambda P$.

On peut donc trouver $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P \in \mathbb{R}_n[X]$*, ce qui permet de trouver des scalaires* $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $P = \sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k$.

On a alors (essentiellement par linéarité de la somme et de la dérivation) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \lambda\mu_k L_k = \lambda P = \varphi(P) &= \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k\right) \\
&= (X^2-1)\left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k\right)'' + 2X\left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k\right)' \\
&= (X^2-1)\sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k'' + 2X\sum_{k=0}^{n} \mu_k L_k' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu_k \left[(X^2-1) L_k'' + 2X L_k'\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu_k \varphi(L_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu_k k(k+1) L_k.
\end{aligned}$$

Par unicité de ce type de décompositions (démontrée à la question précédente), on en déduit

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \lambda\mu_k = k(k+1)\mu_k.$$

Ensuite, de deux choses l'une :

- *Soit* $\forall k \in [\![0,n]\!], \mu_k = 0$*, auquel cas on a* $P = 0$.
- *Soit il existe (au moins) un entier* $j \in [\![0,n]\!]$ *tel que* $\mu_j \neq 0$.
  Dans ce cas, l'égalité $\lambda\mu_j = j(j+1)\mu_j$ *montre que* $\lambda = j(j+1)$.
  Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ *différent de* j*, on a alors* $\mu_k = 0$*. Si ce n'était pas le cas, on pourrait en effet recommencer l'argument précédent et obtenir* $\lambda = k(k+1)$*, ce qui n'est pas compatible avec* $\lambda = j(j+1)$ *(car la suite* $\big(\ell(\ell+1)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante, donc elle ne reprend pas deux fois la même valeur).*
  Ainsi, on a montré $\lambda = j(j+1)$ *et* $P = \mu_j L_j$*, pour un certain entier* $j \in \mathbb{N}$.

Synthèse.

- *Clairement, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, le couple* $(\lambda, 0)$ *convient.*
- *Pour tout* $j \in \mathbb{N}$ *et tout* $\mu \in \mathbb{R}$*, le couple* $\big(j(j+1), \mu L_j\big)$ *convient, parce que*

$$\varphi(\mu L_j) = \mu\varphi(L_j) = \mu\, j(j+1)L_j.$$

In fine*, l'ensemble des couples cherchés est*

$$\left\{(\lambda, 0) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \cup \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} \left\{\big(j(j+1), \mu L_j\big) \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$