Quatrième composition de mathématiques

Durée : *2 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats. Je me réserve le droit de ne pas lire les parties de votre copie qui contreviendront à cette consigne.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1. Les DL du vendredi.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2\,\exp(x^2)}$.
2. Calculer le $DL_4(0)$ de $g : x \mapsto x\,\ln\big(\cos(x)+\mathrm{sh}(x)\big)$.

Exercice 2. Deux inégalités.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. (a) Soit $\varphi :]0,1[\to]0,1[$.
   Montrer que φ est convexe si et seulement si $\widehat{\varphi} : x \mapsto \varphi(1-x)$ est convexe.

   (b) Montrer que la fonction $f : \begin{cases}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} \end{cases}$ est convexe.

   (c) Soit $n \geqslant 2$ et $x_1, \ldots, x_n \in]0,1[$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

2. (a) En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, déterminer le minimum de la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & u+v+\dfrac{1}{uv}. \end{cases}$$

   (b) En déduire que la fonction $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4y^2+x^2y^4-3x^2y^2+1 \end{cases}$ est à valeurs positives.

Exercice 3. Un dessin.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Que dire ?

On fera un dessin pour conjecturer quelque chose de raisonnable, puis on le démontrera.

Problème. Une suite de polynômes adaptée à un opérateur différentiel.

Dans tout ce problème, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes réels

$$Q_n = (X^2 - 1)^n \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{1}{2^n\, n!} Q_n^{(n)}.$$

Attention *à ce qui est écrit (et notamment à la présence de parenthèses dans les exposants) :* Q_n *est la* ***puissance*** n***-ième*** *de* $X^2 - 1$*, mais* L_n *est défini en fonction de la* ***dérivée*** n***-ième*** *de* Q_n*...*

Partie I. Propriétés de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Calculer L_0 et L_1. Vérifier que $L_2 = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme Q_n.
   (b) En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme L_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer rapidement la parité de la fonction polynomiale $x \mapsto L_n(x)$.
   Inutile de rédiger ici une récurrence propre.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) En écrivant $Q_n = (X-1)^n\,(X+1)^n$, exprimer L_n comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme $(X-1)^{n-k}(X+1)^k$ (pour k variant entre 0 et n).
   (b) Montrer $L_n(1) = 1$ et déterminer $L_n(-1)$.
5. **Racines de** L_n**.** Soit $n \geqslant 1$.
   (a) Déterminer les racines de Q_n, avec leur multiplicité.
   (b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $H(k)$ l'assertion « il existe un réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une liste de k réels $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < 1$ tels que $Q_n^{(k)} = \lambda\,(X^2-1)^{n-k}\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$. »
   Montrer $\forall k \in [\![1, n]\!], H(k)$ par récurrence finie.
   (c) En déduire qu'il existe n réels $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < 1$ tels que

$$L_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1, n]\!], \alpha_k + \alpha_{n+1-k} = 0.$$

   (d) À quelle condition le nombre 0 est-il racine de L_n ?

Partie II. Spectre d'un opérateur différentiel.

Dans cette partie, on considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to & \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto & \left((X^2-1)P'\right)' = (X^2-1)P'' + 2X\,P'. \end{cases}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable sous φ, c'est-à-dire que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
7. Déterminer l'ensemble $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, \varphi(P) = 0\right\}$.
8. On veut montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que, pour tout entier naturel n, $\varphi(L_n) = \lambda_n\, L_n$.
   (a) Montrer cette propriété pour $n \in \{0, 1, 2\}$, en explicitant les λ_n associés.
   (b) On suppose maintenant $n \geqslant 2$.
      i. Montrer $(X^2-1)Q_n' = 2n\,X\,Q_n$.
      ii. En dérivant $n+1$ fois la relation précédente, conclure.
9. On souhaite finalement trouver tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k$.
   (b) Conclure.