# Cinquième composition de mathématiques [corrigé]

## Exercice 1. Le DL du vendredi.

Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$.

*On a*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \underbrace{\frac{(-1/2)(-3/2)}{2}}_{=\binom{-1/2}{2}} x^2 + o(x^2) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

$$\text{donc} \qquad \begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

## Exercice 2. Relations coefficients-racines.

1. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + 7$. On admet que ce polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples et non nulles.

   *On a* $P' = 4X^3 - 12X^2 + 8X = 4X(X^2 - 3X + 2) = 4X(X-1)(X-2)$.
   *On vérifie immédiatement que* $P(0) = 7$, $P(1) = 8$ *et* $P(2) = 7$. *Ainsi,*
   - $0$ *n'est pas racine de* P, *c'est-à-dire que les racines de* P *sont non nulles ;*
   - *les racines de* P *ne sont pas racines de* P′ *et sont donc simples.*

   On note $z_1, z_2, z_3$ et $z_4$ les racines de P.

   (b) Déterminer $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ et $z_1\,z_2\,z_3\,z_4$.

   *D'après le cours,*
   - $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\operatorname{coeff}_3(P) = 4$ ;
   - $z_1\,z_2\,z_3\,z_4 = (-1)^4 \operatorname{coeff}_0(P) = 7$.

   (c) Déterminer $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} + \dfrac{1}{z_4}$.

   *En réduisant au même dénominateur,*
   $$\begin{aligned}\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} &= \frac{z_2\,z_3\,z_4 + z_1\,z_3\,z_4 + z_1\,z_2\,z_4 + z_1\,z_2\,z_3}{z_1\,z_2\,z_3\,z_4} \\ &= \frac{1}{7}\big(z_2\,z_3\,z_4 + z_1\,z_3\,z_4 + z_1\,z_2\,z_4 + z_1\,z_2\,z_3\big).\end{aligned}$$

   *Par ailleurs, en développant, on obtient*
   $$\begin{aligned}P &= (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)(X - z_4) \\ &= X^4 + ?X^3 + ?X^2 - \big(z_2\,z_3\,z_4 + z_1\,z_3\,z_4 + z_1\,z_2\,z_4 + z_1\,z_2\,z_3\big)X + ?,\end{aligned}$$
   *si bien que* $z_2\,z_3\,z_4 + z_1\,z_3\,z_4 + z_1\,z_2\,z_4 + z_1\,z_2\,z_3 = -\operatorname{coeff}_1(P) = 0$, *d'où*
   $$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = 0.$$

2. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Donner un polynôme de degré $n$ dont les racines complexes sont les éléments de $\mathbb{U}_n$.

   *Par définition de* $\mathbb{U}_n$, *les racines complexes de* $X^n - 1$ *sont précisément les racines* $n$*-ièmes de l'unité, c'est-à-dire les éléments de* $\mathbb{U}_n$.

   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ et $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

   *Comme* $\mathbb{U}_n$ *possède* $n$ *éléments et que* $X^n - 1$ *est de degré* $n$, *chaque élément de* $\mathbb{U}_n$ *est une racine* ***simple*** *de* $X^n - 1$.
   *Ainsi, d'après les relations coefficients-racines,*
   - $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = -\operatorname{coeff}_{n-1}(X^n - 1) = 0$ ;
   - $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^n \operatorname{coeff}_0(X^n - 1) = (-1)^{n+1}$.

# Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation

$$\left(ABA^{-1}B^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{$E_\alpha$}$$

d'inconnue $(A, B) \in GL_2(\mathbb{C})^2$. Pour plus de simplicité, on note $J_\alpha = \alpha I_2 + E_{1,2}$ la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Le but de cet exercice est de montrer que $(E_\alpha)$ possède des solutions si et seulement si $\alpha = 1$.

1. **Une première condition nécessaire.**
   (a) À quelle condition la matrice $J_\alpha$ est-elle inversible ?

   *Le déterminant de $J_\alpha$ est $\alpha^2$, donc on a l'équivalence*

   $$J_\alpha \in GL_2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \text{dét}(J_\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0.$$

   (b) Montrer que si $\alpha = 0$, l'équation $(E_\alpha)$ ne possède pas de solution.

   *Supposons $\alpha = 0$. Supposons par l'absurde pouvoir trouver une solution $(A, B) \in GL_2(\mathbb{C})^2$ à l'équation $(E_0)$. Par stabilité de $GL_2(\mathbb{C})$ par inverse, on a $A^{-1}, B^{-1} \in GL_2(\mathbb{C})$.*
   *Par stabilité par produit, on en déduit $ABA^{-1}B^{-1} \in GL_2(\mathbb{C})$, puis $\left(ABA^{-1}B^{-1}\right)^2 \in GL_2(\mathbb{C})$, et donc $J_0 \in GL_2(\mathbb{C})$.*
   *Cela contredit la question précédente, et conclut la démonstration.*

2. **Racines carrées de $J_\alpha$.** On fixe une fois pour toutes un nombre complexe $\rho$ tel que $\rho^2 = \alpha$.
   (a) Déterminer l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ commutant avec $J_\alpha$.

   *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. *On a*

   $$\begin{aligned} MJ_\alpha = J_\alpha M &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha a & a + \alpha b \\ \alpha c & c + \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + c & \alpha b + d \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a = \alpha a + c \\ a + \alpha b = \alpha b + d \\ \alpha c = \alpha c \\ c + \alpha d = \alpha d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ c = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

   *si bien que les matrices commutant avec $J_\alpha$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.*

   (b) En déduire que les matrices commutant avec $J_\alpha$ s'écrivent sous la forme $\lambda I_2 + \mu E_{1,2}$, pour un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

   *Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice commutant avec $J_\alpha$.*

   *D'après la question précédente, on peut trouver $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.*

   **Analyse.** *Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $M = \lambda I_2 + \mu E_{1,2}$. On a donc $M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. En examinant les coefficients de la première ligne, on en déduit $\lambda = a$ et $\mu = b$.*

**Synthèse.** *Réciproquement, on a bien* $M = aI_2 + bE_{1,2}$.

*On a ainsi montré qu'il existe un unique couple* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $M = \lambda I_2 + \mu E_{1,2}^2$.

(c) On suppose $\alpha \neq 0$.

Montrer qu'il existe exactement deux matrices $R \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = J_\alpha$, et les déterminer explicitement.

**Analyse.** *Soit* $R \in M_2(\mathbb{C})$ *tel que* $R^2 = J_\alpha$.

*En particulier,* $J_\alpha$ *est une puissance de* $R$*, donc les deux matrices commutent.*

*D'après la question précédente, on peut donc trouver* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *tels que* $R = \lambda I_2 + \mu E_{1,2}$. *On en déduit (notamment parce que* $E_{1,2}$ *commute avec* $I_2$ *et que son carré est nul) que*

$$\begin{aligned} J_\alpha = R^2 &= \left(\lambda I_2 + \mu E_{1,2}\right)^2 \\ &= \lambda^2 I_2 + 2\lambda\mu E_{1,2}. \end{aligned}$$

*Comme* $J_\alpha = \alpha I_2 + E_{1,2}$ *(et qu'elle commute avec* $J_\alpha$*), l'unicité montrée à la question précédente donne* $\alpha = \lambda^2$ *et* $2\lambda\mu = 1$.

*D'après les propriétés sur les racines carrées des nombres complexes, on en déduit que* $\lambda = \pm\rho$ *(qui est donc non nul, puisque* $\alpha \neq 0$*), puis* $\mu = \dfrac{1}{2\lambda} = \pm\dfrac{1}{2\rho}$.

*Ainsi,* $R = \pm\begin{pmatrix} \rho & 1/(2\rho) \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$.

**Synthèse.** *Réciproquement,* $\left[\pm\begin{pmatrix} \rho & 1/(2\rho) \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} \rho & 1/(2\rho) \\ 0 & \rho \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \rho^2 & 1 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} = J_\alpha$.

In fine, $J_\alpha$ *possède deux racines carrées :* $\begin{pmatrix} \rho & 1/(2\rho) \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ *et* $-\begin{pmatrix} \rho & 1/(2\rho) \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ *(qui sont bien différentes).*

3. **Condition nécessaire.**

(a) Montrer $\forall U, V \in M_2(\mathbb{C}), \text{dét}(UV) = \text{dét}(U)\ \text{dét}(V)$.

*Soit* $U = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. *On a*

$$\begin{aligned} \text{dét}(UV) &= \begin{vmatrix} x\xi + y\zeta & x\eta + y\theta \\ z\xi + t\zeta & z\eta + t\theta \end{vmatrix} \\ &= (x\xi + y\zeta)(z\eta + t\theta) - (x\eta + y\theta)(z\xi + t\zeta) \\ &= \left(xz\xi\eta + xt\xi\theta + yz\eta\zeta + yt\zeta\theta\right) - \left(xz\xi\eta + xt\eta\zeta + yz\xi\theta + yt\zeta\theta\right) \\ &= xt\xi\theta + yz\eta\zeta - xt\eta\zeta - yz\xi\theta \\ &= xt(\xi\theta - \eta\zeta) + yz(\eta\zeta - \xi\theta) \\ &= (xt - yz)(\xi\theta - \eta\zeta) \\ &= \text{dét}(U)\,\text{dét}(V). \end{aligned}$$

(b) Montrer que si $(E_\alpha)$ possède une solution, alors $\alpha = 1$.

*Supposons que* $(E_\alpha)$ *possède une solution* $(A, B)$.

*D'après le début de l'exercice, cela entraîne déjà* $\alpha \neq 0$.

*La matrice* $R = ABA^{-1}B^{-1}$ *vérifie* $R^2 = J_\alpha$ *donc on a nécessairement* $R = \pm\begin{pmatrix} \rho & 1/(2\rho) \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$.

*La propriété fondamentale du déterminant donne* $\text{dét}(A)\,\text{dét}(A^{-1}) = \text{dét}(AA^{-1}) = \text{dét}\, I_2 = 1$, *donc on en déduit* $\text{dét}\, A \neq 0$ *et* $\text{dét}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{dét}\, A}$. *De même,* $\text{dét}(B^{-1}) = \dfrac{1}{\text{dét}\, B}$. *Ainsi,*

$$\text{dét}\, R = \text{dét}(ABA^{-1}B^{-1}) = \text{dét}(A)\,\text{dét}(B)\frac{1}{\text{dét}(A)}\frac{1}{\text{dét}(B)} = 1,$$

*ce qui montre* $\alpha = 1$.

4. Conclure.

*Les questions précédentes du problème montrent que si* $(E_\alpha)$ *possède une solution, alors* $\alpha = 1$. *Il reste à montrer la réciproque. Les racines carrées de* $J_1$ *étant* $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *il reste à exprimer l'une de ces deux matrices sous la forme d'un produit* $ABA^{-1}B^{-1}$, *ce qui n'est pas évident.*

*On se simplifie un peu la vie si l'on cherche* $A$ *et* $B$ *parmi des matrices triangulaires très simples (qui ne commutent pas, car on aurait alors* $ABA^{-1}B^{-1} = I_2$*), par exemple l'une des deux diagonales et l'autre de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*Parmi beaucoup d'autres, le couple* $(A, B) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ *convient.*

## Problème. Une classe remarquable de matrices carrées.

On fixe une fois pour toutes un entier $n \geqslant 2$.

Dans tout ce problème, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes. En particulier, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on assimilera $X$ à une matrice colonne et $X^T$ à une matrice ligne.

De même, on assimilera une matrice carrée $A \in M_1(\mathbb{R})$ d'ordre 1 au nombre réel qui est son unique coefficient.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on notera $C_j(A) \in \mathbb{R}^n$ la j-ième colonne de A. Par exemple, $\forall j \in [\![1, n]\!], C_j(I_n) = e_j$, où l'on a noté $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs de la base canonique.

On note $J_n = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ la *all-ones matrix*.

Pour tous $k, \ell \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice élémentaire usuelle.

Enfin,

- on notera $\overline{\mathscr{R}}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont proportionnelles à un vecteur fixé, c'est-à-dire

$$\overline{\mathscr{R}} = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists X \in \mathbb{R}^n : \forall j \in [\![1, n]\!], \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_j(A) = \lambda X \right\} \; ;$$

- on note $\mathscr{R} = \overline{\mathscr{R}} \setminus \{0\}$ l'ensemble des matrices non nulles de $\overline{\mathscr{R}}$.

1. Soit $p \geqslant 1$. Montrer $\forall A \in M_{n,p}(K), \forall B \in M_{p,n}(K), \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

   *La démonstration a été donnée en cours dans le cas* $n = p$, *mais il n'y a à vrai dire rien de nouveau dans ce cas plus général : le calcul montre que* $\operatorname{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} [A]_{i,j}[B]_{j,i} = \operatorname{tr}(BA)$.

## Partie I. Généralités sur $\mathscr{R}$.

2. (a) Montrer que $J_n \in \mathscr{R}$.

   *Montrons* $\exists X \in \mathbb{R}^n : \forall j \in [\![1, n]\!] : \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_j(J_n) = \lambda X$.

   ***Candidat :*** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

   *Soit* $j \in [\![1, n]\!]$.
   *On a* $C_j(J_n) = X$, *ce qui conclut* ($\lambda = 1$ *convient).*
   *Cela montre* $J_n \in \overline{\mathscr{R}}$. *Comme* $J_n \neq 0$, *on a même* $J_n \in \mathscr{R}$.

   (b) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que la matrice élémentaire $E_{i,j}$ appartient à $\mathscr{R}$.

   *Montrons* $\exists X \in \mathbb{R}^n : \forall \ell \in [\![1, n]\!] : \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_\ell(E_{i,j}) = \lambda X$.
   ***Candidat :*** $X = e_i \in \mathbb{R}^n$.
   *Soit* $\ell \in [\![1, n]\!]$.

   - *Si* $\ell = j$, *on a* $C_\ell(E_{i,j}) = X$, *et* $\lambda = 1$ *convient.*
   - *Sinon, on a* $C_\ell(E_{i,j}) = 0$, *et* $\lambda = 0$ *convient.*

   *Cela montre* $E_{i,j} \in \overline{\mathscr{R}}$. *Comme* $E_{i,j} \neq 0$, *on a même* $E_{i,j} \in \mathscr{R}$.

   (c) Montrer que $I_n \notin \mathscr{R}$.

   *Supposons par l'absurde qu'il existe* $X \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\forall j \in [\![1, n]\!], \exists \lambda \in \mathbb{R} : \underbrace{C_j(I_n)}_{=e_j} = \lambda X$.

*En particulier, on peut trouver* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $e_1 = \lambda_1 X$ *et* $e_2 = \lambda_2 X$.

*On en déduit* $\lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2 = \lambda_1\lambda_2 X - \lambda_1\lambda_2 X = 0$. *Mais* $\lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, *donc* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

*Cela contredit* $e_1 = \lambda_1 X$, *et conclut la démonstration.*

3. **Représentation comme tenseur simple.**

 (a) Montrer $\overline{\mathscr{R}} = \left\{ XY^T \,\middle|\, X, Y \in \mathbb{R}^n \right\}$.

*Commençons par un calcul préliminaire. Pour tous* $X, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$XY^T = X \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 X & \cdots & y_n X \end{pmatrix}.$$

**Inclusion directe.** *Soit* $H \in \overline{\mathscr{R}}$. *Ainsi, on peut trouver* $X \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\forall j \in [\![1, n]\!], C_j(H) = \lambda_j X$.
*On peut donc trouver* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $C_1(H) = \lambda_1 X, \ldots, C_n(H) = \lambda_n X$.
*Ainsi,*

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 X & \cdots & \lambda_n X \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^T,$$

*ce qui montre que* $H \in \left\{ XY^T \,\middle|\, X, Y \in \mathbb{R}^n \right\}$.

**Inclusion réciproque.** *Soit* $H \in \left\{ XY^T \,\middle|\, X, Y \in \mathbb{R}^n \right\}$. *On peut trouver* $X, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *tels que*

$$H = XY^T = \begin{pmatrix} y_1 X & \cdots & y_n X \end{pmatrix}.$$

*Il est alors clair que* $\forall j \in [\![1, n]\!], \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_j(H) = \lambda X$, *ce qui montre* $H \in \overline{\mathscr{R}}$.

 (b) En déduire $\mathscr{R} = \left\{ XY^T \,\middle|\, X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$.

**Inclusion directe.** *Soit* $H \in \mathscr{R}$.
*En particulier,* $H \in \overline{\mathscr{R}}$, *donc on peut trouver* $X, Y \in \mathbb{R}^n$ *tels que* $H = XY^T$.
*Si* $X = 0$ *ou* $Y = 0$, *on a immédiatement* $H = 0$, *ce qui est exclu.*
*Ainsi,* $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *donc* $H \in \left\{ XY^T \,\middle|\, X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$.

**Inclusion réciproque.** *Soit* $H \in \left\{ XY^T \,\middle|\, X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$.
*On peut donc trouver* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tels que* $H = XY^T$.
*La question précédente montre déjà que* $H \in \overline{\mathscr{R}}$. *Il reste à montrer que* $H \neq 0$.
*Comme* $X \neq 0$, *on peut trouver* $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $x_i \neq 0$. *De même, on peut trouver* $j \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $y_j \neq 0$. *On en déduit que* $[H]_{i,j} = x_i y_j \neq 0$, *et donc que* $H \neq 0$, *ce qui conclut.*

(c) **Exemples.** Trouver $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $J_n = XY^T$.
De même, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, trouver $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $E_{i,j} = XY^T$.

*On vérifie sans difficulté :*

- *que* $J_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T$ *;*
- *que* $E_{i,j} = e_i\, e_j^T$.

(d) Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H = XY^T$. Montrer, pour tous $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^n$, l'équivalence :

$$\widetilde{X}\widetilde{Y}^T = H \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : \begin{cases} \widetilde{X} = \lambda X \\ \widetilde{Y} = \dfrac{1}{\lambda} Y. \end{cases}$$

**Sens direct.** *Supposons* $\widetilde{X}\widetilde{Y}^T = H = XY^T$. *En notant* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$*, et de même pour les versions avec tilde, on peut trouver* $i, j \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $x_i \neq 0$ *et* $y_j \neq 0$.
*Par ailleurs, la relation* $\widetilde{X}\widetilde{Y}^T = XY^T$ *donne* $\forall k, \ell \in [\![1, n]\!], \widetilde{x}_k\, \widetilde{y}_\ell = x_k\, y_\ell$.
*En particulier,* $\widetilde{x}_i\, \widetilde{y}_j = [H]_{i,j} = x_i\, y_j$*, ce qui permet de poser* $\lambda = \dfrac{\widetilde{x}_i}{x_i}$ *(nécessairement non nul) et d'obtenir* $\widetilde{y}_j = \dfrac{1}{\lambda} y_j$.
*On a alors,*

- *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $\widetilde{x}_k\, \widetilde{y}_j = x_k\, y_j$*, donc* $\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{x}_k \underbrace{y_j}_{\neq 0} = x_k\, y_j$*, donc* $\widetilde{x}_k = \lambda x_k$ *;*
- *pour tout* $\ell \in [\![1, n]\!]$, $\widetilde{x}_i\, \widetilde{y}_\ell = x_i\, y_\ell$*, donc* $\lambda \underbrace{x_i}_{\neq 0} \widetilde{y}_\ell = x_i\, y_\ell$*, donc* $\widetilde{y}_\ell = \dfrac{1}{\lambda} y_\ell$,

*ce qui montre* $\widetilde{X} = \lambda X$ *et* $\widetilde{Y} = \dfrac{1}{\lambda} Y$.

**Sens réciproque.** *Supposons pouvoir trouver* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $\widetilde{X} = \lambda X$ *et* $\widetilde{Y} = \dfrac{1}{\lambda} Y$.
*On a alors, par bilinéarité du produit matriciel,*

$$\widetilde{X}\widetilde{Y}^T = \lambda X \frac{1}{\lambda} Y^T = \lambda \frac{1}{\lambda} X\, Y^T = XY^T.$$

4. Montrer $\forall H \in \mathscr{R}, H^T \in \mathscr{R}$.

*Soit* $H \in \mathscr{R}$*. On peut donc trouver* $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tels que* $H = XY^T$.
*On a alors* $H^T = YX^T$*, ce qui montre* $H^T \in \mathscr{R}$.

5. (a) Montrer $\forall A \in \overline{\mathscr{R}}, \forall B \in M_n(\mathbb{R}), AB \in \overline{\mathscr{R}}$ et $BA \in \overline{\mathscr{R}}$.

*Soit* $A \in \overline{\mathscr{R}}$ *et* $B \in M_n(\mathbb{R})$*. On peut trouver* $X, Y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $A = XY^T$.

- *On a* $AB = X(Y^T A) = X(A^T Y)^T$*. Comme* $A^T Y \in \mathbb{R}^n$*, cela montre* $AB \in \overline{\mathscr{R}}$.
- *On a* $BA = (BX)Y^T$*. Comme* $BX \in \mathbb{R}^n$*, cela montre* $BA \in \overline{\mathscr{R}}$.

(b) En déduire que $\overline{\mathscr{R}} \cap GL_n(\mathbb{R}) = \varnothing$.

*Supposons par l'absurde pouvoir trouver* $A \in \overline{\mathscr{R}}$ *inversible. On a donc* $AA^{-1} = I_n$.
*D'après la question précédente, cela entraînerait* $I_n \in \overline{\mathscr{R}}$*, ce qui a été exclu.*

6. Soit $H \in \overline{\mathscr{R}}$.

   (a) Montrer que $H^2 = \mathrm{tr}(H)H$.

   *On peut trouver* $X, Y \in \mathbb{R}^n$ *tels que* $H = XY^T$. *On a alors* $H^2 = XY^TXY^T$.
   *Or,* $Y^TX$ *est une matrice* $1 \times 1$*, que l'on va identifier à son unique coefficient, noté* $\theta$.
   *On a alors* $H^2 = X\theta Y^T = \theta XY^T = \theta H$*, par bilinéarité du produit matriciel.*
   *Pour identifier le nombre* $\theta$*, on peut remarquer que l'unique coefficient d'une matrice* $1 \times 1$ *est également sa trace, donc, d'après la question 1,*

$$\theta = \mathrm{tr}(Y^TX) = \mathrm{tr}(XY^T) = \mathrm{tr}(H),$$

   *ce qui conclut.*

   (b) En déduire une expression de $H^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   *Une récurrence immédiate permet de montrer* $\forall k \in \mathbb{N}^*, H^k = \mathrm{tr}(H)^{k-1}H$.

## Partie II. Réduction des matrices de $\mathscr{R}$.

Le but de cette partie est de montrer que pour toute matrice $H \in \mathscr{R}$, on peut trouver $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}HP = \begin{cases} \mathrm{tr}(H)\, E_{1,1} & \text{si } \mathrm{tr}(H) \neq 0 \\ E_{1,2} & \text{si } \mathrm{tr}(H) = 0. \end{cases}$$

et de fournir une application de ce résultat.

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

   *Par cyclicité de la trace,* $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$.

   (b) Montrer que $P^{-1}AP$ est inversible si et seulement si $A$ l'est.

   - *Supposons* $A$ *inversible. Alors* $P^{-1}AP$ *est inversible par stabilité de* $GL_n(\mathbb{R})$ *par produit.*
   - *Réciproquement, supposons* $P^{-1}AP$ *inversible. En utilisant l'implication que l'on vient de montrer avec la matrice inversible* $P^{-1}$*, on obtient que* $PP^{-1}APP^{-1} = A$ *est inversible.*

8. **Un lemme de transitivité.** Dans cette question, on note

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \neq 0 \right\}.$$

   (a) Montrer que $\forall X \in N, \exists T \in GL_n(\mathbb{R}) : C_1(T) = X$.

   *Soit* $X \in N$.
   *On considère la matrice* $T$ *obtenue en remplaçant la première colonne de l'identité* $I_n$ *par* $X$.
   *Comme le premier coefficient de* $X$ *est non nul, on a* $T \in T_n^-(\mathbb{R})$ *et les coefficients diagonaux de* $T$ *sont non nuls, donc* $T \in GL_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists \Omega \in GL_n(\mathbb{R}) : \Omega X \in N$.

   *Soit* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- *Si* $x_1 \neq 0$*, la question précédente conclut, en prenant* $\Omega = I_n$.
- *Sinon, on peut trouver* $i \neq 1$ *tel que* $x_i \neq 0$*. En prenant pour* $\Omega$ *la matrice d'échange* $P_{1,i}$*, on a donc* $P_{1,i}X \in N$ *car le premier coefficient de* $P_{1,i}X$ *est* $x_i$.

(c) En déduire $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists Q \in GL_n(\mathbb{R}) : X = Qe_1$.

*Soit* $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
*Grâce à la question précédente, on peut trouver* $\Omega \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\Omega X \in N$.
*Grâce à la question précédant celle-là, on peut alors trouver une matrice* $T \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que l'on ait* $\Omega X = C_1(T) = Te_1$.
*Ainsi,* $X = \Omega^{-1}Te_1$*, ce qui conclut car* $\Omega^{-1}T \in GL_n(\mathbb{R})$ *d'après les propriétés de stabilité du groupe linéaire.*

9. Soit $H \in \mathscr{R}$. En utilisant la question 3 et ce qui précède, montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que la matrice $Q^{-1}HQ$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(H) & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

*D'après la question 3, on peut trouver* $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tels que* $H = XY^T$.
*D'après ce qui précède, on peut trouver* $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $X = Qe_1$*, c'est-à-dire* $e_1 = Q^{-1}X$*. On a donc*

$$Q^{-1}HQ = Q^{-1}XY^TQ = e_1\,(Y^TQ),$$

*ce qui montre que* $Q^{-1}HQ$ *a pour forme* $\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

*D'après la question 7, le coefficient* $(1,1)$ *de* $Q^{-1}HQ$ *vaut* $\mathrm{tr}(Q^{-1}HQ) = \mathrm{tr}(H)$*, ce qui conclut.*

Dans la suite de cette partie, on fixe une telle matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, et un vecteur $V \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que l'on ait l'écriture par blocs $Q^{-1}HQ = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(H) & V^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. **Premier cas.** On suppose $\mathrm{tr}(H) \neq 0$.

(a) Soit $W \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 1 & W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible, et déterminer son inverse.

*Un calcul par blocs direct montre* $\begin{pmatrix} 1 & W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$*, ce qui conclut : la matrice est inversible, d'inverse* $\begin{pmatrix} 1 & -W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$.

(b) En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}HP = \mathrm{tr}(H)\,E_{1,1}$.

*Posons (après calcul au brouillon)* $W = -\dfrac{1}{\mathrm{tr}\,H}V$*, puis* $P = Q\begin{pmatrix} 1 & W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$*. On a donc*

$$\begin{aligned} P^{-1}HP &= \begin{pmatrix} 1 & -W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} Q^{-1}HQ \begin{pmatrix} 1 & W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(H) & V^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(H) & \mathrm{tr}(H)W^T + V^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(H) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(H)E_{1,1}.$$

11. **Deuxième cas.** On suppose $\mathrm{tr}(H) = 0$.
Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}HP = E_{1,2}$.

*Remarquons déjà que la non-nullité de* $H$ *entraîne celle de* $Q^{-1}HQ$ *: en effet, si l'on avait* $Q^{-1}HQ = 0$*, on en déduirait* $H = 0$ *après multiplication à gauche par* $Q$ *et à droite par* $Q^{-1}$*.*

*Comme* $Q^{-1}HQ = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(H) & V^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, on en déduit que* $V \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$*.*

*En utilisant la question 8 (pour l'entier* $n-1$ *à l'inverse de* $n$*, mais la propriété est de toute façon tautologiquement vraie pour des matrices* $1 \times 1$*), on peut trouver une matrice* $R \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ *telle que* $V = R\widetilde{e}_1$ *(où l'on a noté* $\widetilde{e}_1$ *le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^{n-1}$*). On en déduit* $\widetilde{e}_1 = R^{-1}V$*, puis* $\widetilde{e}_1^T = V^T(R^{-1})^T = V^T(R^T)^{-1}$*.*

*On vérifie alors que la matrice diagonale par blocs* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (R^T)^{-1} \end{pmatrix}$ *est inversible, d'inverse* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix}$*. Par stabilité par produit de* $GL_n(\mathbb{R})$*, on en déduit que* $P = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (R^T)^{-1} \end{pmatrix}$ *est bien élément de* $GL_n(\mathbb{R})$*.*

*Or,*

$$\begin{aligned} P^{-1}HP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} Q^{-1}HQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (R^T)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (R^T)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & V^T(R^T)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{e}_1^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}. \end{aligned}$$

12. **Application : mise à jour de matrices inversibles.** Soit $H \in \overline{\mathscr{R}}$.
    (a) Montrer que $I_n + H$ est inversible si et seulement si $\mathrm{tr}(H) \neq -1$.

- ***Zéroïème cas.*** *Clairement, si* $H = 0$*,* $I_n + H = I_n$ *est inversible.*
- ***Premier cas.*** *On suppose* $\mathrm{tr}(H) \neq 0$ *(donc* a fortiori $H \neq 0$*, ce qui donne* $H \in \mathscr{R}$*).*
  *On peut donc trouver* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}HP = \mathrm{tr}(H)\,E_{1,1}$*, ce que l'on peut réécrire* $H = P\big(\mathrm{tr}(H)E_{1,1}\big)P^{-1}$ *en multipliant à gauche par* $P$ *et à droite par* $P^{-1}$*.*
  *Alors* $I_n + H = PI_nP^{-1} + P\big(\mathrm{tr}(H)E_{1,1}\big)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(1+\mathrm{tr}(H), 1, \ldots, 1)P^{-1}$*.*
  *D'après la question 7b,* $I_n + H$ *est inversible si et seulement si* $\mathrm{diag}(1+\mathrm{tr}(H), 1, \ldots, 1)$ *est inversible, c'est-à-dire si et seulement si* $1 + \mathrm{tr}(H) \neq 0$ *(car les autres coefficients, égaux à* $1$*, ne sauraient s'annuler).*
- ***Deuxième cas.*** *On suppose* $H \neq 0$ *(donc* $H \in \mathscr{R}$*) et* $\mathrm{tr}(H) = 0$*. On peut alors trouver de façon analogue au cas précédent une matrice* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $H = PE_{1,2}P^{-1}$*. On a alors*

  $$I_n + H = PI_nP^{-1} + PE_{1,2}P^{-1} = P(I_n + E_{1,2})P^{-1}.$$

  *Le critère d'inversibilité des matrices triangulaires (ou la remarque qu'il s'agit d'une matrice de transvection) montre que* $I_n + E_{1,2}$ *est inversible, donc il en va de même de* $I_n + H$ *d'après la question 7b.*

*Dans tous les cas, on a donc obtenu que* $I_n + H$ *était inversible si et seulement si* $\operatorname{tr}(H) \neq -1$.

(b) On suppose $\operatorname{tr}(H) \neq -1$. Montrer que $(I_n + H)^{-1} = I_n - \dfrac{1}{1+\operatorname{tr}(H)} H$.

*C'est un calcul direct, à l'aide de la question 6a :*

$$\begin{aligned}(I_n + H)\left(I_n - \frac{1}{1+\operatorname{tr}(H)}H\right) &= I_n + H - \frac{1}{1+\operatorname{tr}(H)}H - \frac{1}{1+\operatorname{tr}(H)} \underbrace{H^2}_{=\operatorname{tr}(H)\,H} \\ &= I_n + \left(1 - \frac{1}{1+\operatorname{tr}(H)} - \frac{\operatorname{tr} H}{1+\operatorname{tr}(H)}\right) H \\ &= I_n.\end{aligned}$$

(c) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

i. Montrer que $A + H$ est inversible si et seulement si $\operatorname{tr}(A^{-1}H) \neq -1$.

*On peut écrire* $A + H = A\big(I_n + A^{-1}H\big)$, *et on en déduit facilement que* $A + H$ *est inversible si et seulement si* $I_n + A^{-1}H$ *l'est.*
*Par la question 5a, la matrice* $A^{-1}H$ *appartient à* $\overline{\mathscr{R}}$.
*D'après la question précédente, on en déduit que* $I_n + A^{-1}H$ *est inversible si et seulement si l'on a* $\operatorname{tr}(A^{-1}H) \neq -1$, *ce qui conclut.*

ii. On suppose $\operatorname{tr}(A^{-1}H) \neq -1$. Exprimer $(A + H)^{-1}$ en fonction de $A^{-1}$ et $H$.

*En utilisant la question précédente, on a*

$$\begin{aligned}(A + H)^{-1} &= \big(A(I_n + A^{-1}H)\big)^{-1} \\ &= (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} \\ &= \left(I_n - \frac{1}{1+\operatorname{tr}(A^{-1}H)}A^{-1}H\right)A^{-1} \\ &= A^{-1} - \frac{1}{1+\operatorname{tr}(A^{-1}H)}A^{-1}HA^{-1}.\end{aligned}$$

***Remarque.*** *La dernière formule est connue sous le nom de* formule d'inversion de Sherman-Morrison.

## Partie III. Théorème d'Erdos (1967).

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *idempotente* si $M^2 = M$. L'ensemble de ces matrices sera noté $\mathscr{P}_n$.

On dira qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est *produit d'idempotentes* s'il existe $r \geqslant 1$ et $M_1, \ldots, M_r \in M_n(\mathbb{R})$ idempotentes telles que $A = M_1 \cdots M_r$. On notera $\mathscr{P}_n^\sharp$ l'ensemble des produits d'idempotentes.

Cet ensemble vérifiera donc notamment les propriétés $\mathscr{P}_n \subseteq \mathscr{P}_n^\sharp$ et $\forall A_1, A_2 \in \mathscr{P}_n^\sharp, A_1A_2 \in \mathscr{P}_n^\sharp$, librement utilisables dans la suite.

Le but de cette partie est de montrer un théorème dû au mathématicien britannique John Erdos, affirmant que toute matrice non inversible est produit d'idempotentes.

13. Décrire l' intersection $\mathscr{P}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.

*Soit* $M \in \mathscr{P}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$. *On a donc* $M^2 = M$, *c'est-à-dire* $M(M - I_n) = 0$.
*Comme* $M$ *est inversible, on obtient* $M - I_n = 0$ *en multipliant à gauche par* $M^{-1}$. *Ainsi,* $M = I_n$.
*Puisque la réciproque est claire, on en déduit* $\mathscr{P}_n \cap GL_n(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.

14. **Commutant d'une matrice de $\mathscr{R}$.** Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H = X\,Y^T \in \mathscr{R}$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ commutant avec $H$.
Montrer que l'on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$, $Y^T A = \lambda Y^T$ et $AH = HA = \lambda H$.

*On a* $AH = HA$, *c'est-à-dire* $(AX)Y^T = X(Y^T A) = X(A^T Y)^T$.

- *Si* $Y^T A = 0$, *on a* $AH = HA = 0$, *donc* $(AX)Y^T = 0$. *D'après la question 3b, on en déduit* $AX = 0$ *(car* $Y \neq 0$*). Cela montre la propriété voulue (*$\lambda = 0$ *convient).*
- *Si* $Y^T A \neq 0$, *la question 3d montre l'existence de* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $AX = \lambda X$ *et* $Y = \dfrac{1}{\lambda} A^T Y$, *ce qui se traduit en* $AX = \lambda X$ *et* $A^T Y = \lambda Y$, *ou encore* $Y^T A = \lambda Y^T$.
  *On en déduit encore* $AH = AXY^T = \lambda XY^T = \lambda H$.

15. Soit $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\Omega - \Omega^2 \in \mathscr{R}$. On note $H = \Omega - \Omega^2$.
   (a) Montrer que l'on peut trouver $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\Omega X = \lambda X$, $Y^T \Omega = \lambda Y^T$ et $\lambda - \lambda^2 = \operatorname{tr}(H)$.

   *Comme* $H \in \mathscr{R}$, *on peut trouver* $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tels que* $H = XY^T$.
   *Comme* $H = \Omega - \Omega^2$ *et* $\Omega$ *commutent, la question précédente montre l'existence de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\Omega X = \lambda X$, $Y^T \Omega = \lambda Y^T$, *et* $\Omega H = \lambda H$. *On en déduit*

$$\operatorname{tr}(H)\,H = H^2 = (\Omega - \Omega^2)H = \Omega H - \Omega\,\underbrace{\Omega H}_{=\lambda H} = (\lambda - \lambda^2)H.$$

   *Comme la matrice* $H$ *n'est pas nulle, on en déduit* $\lambda - \lambda^2 = \operatorname{tr}(H)$, *ce qui conclut.*

   (b) En déduire l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \theta & Y^T \\ X & \Omega \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathscr{P}_{n+1}$.

   *On a*

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & Y^T \\ X & \Omega \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2 + Y^T X & Y^T\Omega + (1-\lambda)Y^T \\ \Omega X + (1-\lambda)X & XY^T + \Omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2 + Y^T X & Y^T \\ X & \Omega \end{pmatrix}.$$

   *Or,* $Y^T X$ *est une matrice* $1 \times 1$ *dont l'unique coefficient est*

$$\operatorname{tr}(Y^T X) = \operatorname{tr}(XY^T) = \operatorname{tr}(H) = \lambda - \lambda^2,$$

   *donc le coefficient* $(1,1)$ *est*

$$(1-\lambda)^2 + Y^T X = (1-\lambda)^2 + (\lambda - \lambda^2) = 1 - \lambda,$$

   *ce qui montre que*

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & Y^T \\ X & \Omega \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & Y^T \\ X & \Omega \end{pmatrix}.$$

   (c) En déduire que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{P}^\sharp_{n+1}$.

   *Il est immédiat que* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}$. *On en déduit que*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\lambda & Y^T \\ X & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{P}^\sharp_{n+1}.$$

16. Soit $\Omega \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice d'opérations élémentaires (échange, transvection ou dilatation).
   (a) Montrer que $\Omega - \Omega^2 \in \overline{\mathscr{R}}$.

   ► *Pour tout* $i \neq j \in [\![1, n]\!]$*, on a*
   $$P_{i,j} - P_{i,j}^2 = P_{i,j} - I_n = E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j} = (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T \in \mathscr{R}.$$
   ► *Pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$ *et tout* $\lambda \neq 0$*, on a*
   $$D_i(\lambda) - D_i(\lambda)^2 = (\lambda - \lambda^2)E_{i,i} = (\lambda - \lambda^2)e_i\, e_i^T \in \overline{\mathscr{R}}.$$
   ► *Pour tous* $i \neq j \in [\![1, n]\!]$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a*
   $$T_{i,j}(\lambda) - T_{i,j}(\lambda)^2 = -\lambda E_{i,j} = (-\lambda e_i)\, e_j^T \in \overline{\mathscr{R}}.$$

   (b) Dans quels cas a-t-on $\Omega - \Omega^2 = 0$ ?
   Montrer que dans ces cas, on a également $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}^\sharp$.

   *Si l'on a* $\Omega - \Omega^2 = 0$*, la matrice* $\Omega$ *est à la fois dans* $\mathscr{P}_n$ *et inversible (en tant que matrice d'opération élémentaire), donc* $\Omega = I_n$ *(et réciproquement).*
   *Il est alors clair que* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1} \subseteq \mathscr{P}_{n+1}^\sharp$.

Ainsi, pour toute matrice d'opérations élémentaires $\Omega \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{P}_{n+1}^\sharp$. Comme remarqué (mais pas vraiment démontré) en cours, l'algorithme du pivot de Gauss permet de décomposer toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ comme produit de matrices d'opérations élémentaires. On en déduit
$$\forall B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}^\sharp.$$

17. (a) Soit $W \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & W^T \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}$.

   *C'est un calcul direct.*

   (b) En déduire que $\forall B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall V \in \mathbb{R}^n$, $\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}^\sharp$.

   *Soit* $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *et* $V \in \mathbb{R}^n$*. On a alors*
   $$\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & V^T B^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{P}_{n+1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{P}_{n+1}^\sharp} \in \mathscr{P}_{n+1}^\sharp.$$

18. Dans cette question, on suppose simplement $n \geqslant 1$.
   Soit $A \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ non inversible. En utilisant la question 8, montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & B \end{pmatrix}$, pour un certain choix de $V \in \mathbb{R}^n$ et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

   *D'après le critère nucléaire d'inversibilité, on peut trouver* $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ *non nul tel que* $AX = 0$*. D'après la question 8, on peut trouver* $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *tel que* $X = P\widehat{e}_1$*, où l'on a noté* $\widehat{e}_1$ *le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^{n+1}$.
   *La première colonne de* $P^{-1}AP$ *vaut donc*
   $$P^{-1}AP\widehat{e}_1 = P^{-1}AX = 0,$$
   *ce qui montre que* $P^{-1}AP$ *a la forme attendue.*

19. Achever la démonstration du théorème d'Erdos.

*Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *notons* $\mathrm{Erd}(n)$ *l'assertion* $M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}^\sharp_{n+1}$.
*Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Erd}(n)$ *par récurrence forte.*

**Initialisation.** *Le cas* $n = 1$ *est trivial, car la seule matrice* $1 \times 1$ *non inversible est la matrice nulle, évidemment idempotente.*

**Hérédité.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{Erd}(1)$ *et* $\mathrm{Erd}(2)$ $\cdots$ *et* $\mathrm{Erd}(n)$. *Montrons* $\mathrm{Erd}(n+1)$.

*Soit* $A \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \setminus GL_{n+1}(\mathbb{R})$. *D'après la question précédente, on peut trouver* $P \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ *tel que* $P^{-1}AP$ *soit de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & B \end{pmatrix}$, *pour un certain choix de* $V \in \mathbb{R}^n$ *et* $B \in M_n(\mathbb{R})$.

*Montrons* $P^{-1}AP \in \mathscr{P}^\sharp_{n+1}$.

- *Si* $B \in GL_n(\mathbb{R})$, *les questions précédentes montrent déjà* $P^{-1}AP \in \mathscr{P}^\sharp_{n+1}$.
- *Supposons* $B \notin GL_n(\mathbb{R})$.
  - *Par hypothèse de récurrence, on peut trouver* $M_1, \dots, M_r \in \mathscr{P}_n$ *telles que* $B = M_1 \cdots M_r$. *En posant, pour tout* $k \in [\![1, r]\!], \widehat{M}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_k \end{pmatrix}$, *on vérifie que* $\widehat{M}_1, \dots, \widehat{M}_k \in \mathscr{P}_{n+1}$ *et que leur produit vaut* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, *qui est donc élément de* $\mathscr{P}^\sharp_{n+1}$.
  - *Un calcul fait plus haut montre que* $\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}$.

  *Par produit,* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{P}^\sharp_{n+1}$.

*On peut donc trouver* $N_1, \dots, N_s \in \mathscr{P}_{n+1}$ *tel que* $P^{-1}AP = N_1 \cdots N_s$.
*On en déduit que*

$$\begin{aligned} A = P(P^{-1}AP)P^{-1} &= PN_1 \cdots N_s P^{-1} \\ &= (PN_1P^{-1}) \cdots (PN_sP^{-1}). \end{aligned}$$

*Or, pour tout* $k \in [\![1, s]\!]$, *on a*

$$(PN_kP^{-1})^2 = PN_kP^{-1}PN_kP^{-1} = PN_k^2P^{-1} = PN_kP^{-1} \qquad \text{donc} \qquad PN_kP^{-1} \in \mathscr{P}_{n+1}.$$

*Cela montre que* $A \in \mathscr{P}^\sharp_{n+1}$.
*On a ainsi montré* $\mathrm{Erd}(n+1)$, *ce qui clôt la récurrence, la démonstration, et ce corrigé.*