Cinquième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats. Je me réserve le droit de ne pas lire les parties de votre copie qui contreviendront à cette consigne.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*

Exercice 1. Le DL du vendredi.

Calculer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$.

Exercice 2. Relations coefficients-racines.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + 7$. On admet que ce polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples et non nulles.
   On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les racines de P.
   (b) Déterminer $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ et $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$.
   (c) Déterminer $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} + \dfrac{1}{z_4}$.
2. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Donner un polynôme de degré n dont les racines complexes sont les éléments de $\mathbb{U}_n$.
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ et $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation

$$\left(ABA^{-1}B^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad (E_\alpha)$$

d'inconnue $(A, B) \in GL_2(\mathbb{C})^2$. Pour plus de simplicité, on note $J_\alpha = \alpha\, I_2 + E_{1,2}$ la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Le but de cet exercice est de montrer que (E_α) possède des solutions si et seulement si $\alpha = 1$.

1. **Une première condition nécessaire.**
   (a) À quelle condition la matrice J_α est-elle inversible ?
   (b) Montrer que si $\alpha = 0$, l'équation (E_α) ne possède pas de solution.
2. **Racines carrées de** J_α**.** On fixe une fois pour toutes un nombre complexe ρ tel que $\rho^2 = \alpha$.
   (a) Déterminer l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ commutant avec J_α.
   (b) En déduire que les matrices commutant avec J_α s'écrivent sous la forme $\lambda I_2 + \mu E_{1,2}$, pour un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
   (c) On suppose $\alpha \neq 0$.
   Montrer qu'il existe exactement deux matrices $R \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = J_\alpha$, et les déterminer explicitement.
3. **Condition nécessaire.**
   (a) Montrer $\forall U, V \in M_2(\mathbb{C}), \text{dét}(UV) = \text{dét}(U)\ \text{dét}(V)$.
   (b) Montrer que si (E_α) possède une solution, alors $\alpha = 1$.
4. Conclure.

Problème. Une classe remarquable de matrices carrées.

On fixe une fois pour toutes un entier $n \geqslant 2$.

Dans tout ce problème, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes. En particulier, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on assimilera X à une matrice colonne et X^T à une matrice ligne.

De même, on assimilera une matrice carrée $A \in M_1(\mathbb{R})$ d'ordre 1 au nombre réel qui est son unique coefficient.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on notera $C_j(A) \in \mathbb{R}^n$ la j-ième colonne de A. Par exemple, $\forall j \in [\![1, n]\!], C_j(I_n) = e_j$, où l'on a noté $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs de la base canonique.

On note $J_n = \big(1\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ la *all-ones matrix*.

Pour tous $k, \ell \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{k,\ell} = \big(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice élémentaire usuelle.

Enfin,

- on notera $\overline{\mathscr{R}}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont proportionnelles à un vecteur fixé, c'est-à-dire

$$\overline{\mathscr{R}} = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \exists X \in \mathbb{R}^n : \forall j \in [\![1, n]\!], \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_j(A) = \lambda X \right\} \ ;$$

- on note $\mathscr{R} = \overline{\mathscr{R}} \setminus \{0\}$ l'ensemble des matrices non nulles de $\overline{\mathscr{R}}$.

1. Soit $p \geqslant 1$. Montrer $\forall A \in M_{n,p}(K), \forall B \in M_{p,n}(K), \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Partie I. Généralités sur $\mathscr{R}$.

2. (a) Montrer que $J_n \in \mathscr{R}$.
   (b) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que la matrice élémentaire $E_{i,j}$ appartient à $\mathscr{R}$.
   (c) Montrer que $I_n \notin \mathscr{R}$.
3. **Représentation comme tenseur simple.**
   (a) Montrer $\overline{\mathscr{R}} = \left\{ XY^T \,\middle|\, X, Y \in \mathbb{R}^n \right\}$.
   (b) En déduire $\mathscr{R} = \left\{ XY^T \,\middle|\, X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$.
   (c) **Exemples.** Trouver $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $J_n = XY^T$.
   De même, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, trouver $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $E_{i,j} = XY^T$.
   (d) Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H = XY^T$. Montrer, pour tous $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^n$, l'équivalence :

$$\widetilde{X}\widetilde{Y}^T = H \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : \begin{cases} \widetilde{X} = \lambda X \\ \widetilde{Y} = \dfrac{1}{\lambda} Y. \end{cases}$$

Dans la suite du sujet, il vaudra mieux utiliser la question précédente que revenir à la définition de $\overline{\mathscr{R}}$ et $\mathscr{R}$.

4. Montrer $\forall H \in \mathscr{R}, H^T \in \mathscr{R}$.
5. (a) Montrer $\forall A \in \overline{\mathscr{R}}, \forall B \in M_n(\mathbb{R}), AB \in \overline{\mathscr{R}}$ et $BA \in \overline{\mathscr{R}}$.
   (b) En déduire que $\overline{\mathscr{R}} \cap GL_n(\mathbb{R}) = \varnothing$.
6. Soit $H \in \overline{\mathscr{R}}$.
   (a) Montrer que $H^2 = \operatorname{tr}(H)H$.
   Indication. *On pourra utiliser entre autres la question 1.*
   (b) En déduire une expression de H^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Partie II. Réduction des matrices de $\mathscr{R}$.

Le but de cette partie est de montrer que pour toute matrice $H \in \mathscr{R}$, on peut trouver $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}HP = \begin{cases} \operatorname{tr}(H)\, E_{1,1} & \text{si } \operatorname{tr}(H) \neq 0 \\ E_{1,2} & \text{si } \operatorname{tr}(H) = 0. \end{cases}$$

et de fournir une application de ce résultat.

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$.
   (b) Montrer que $P^{-1}AP$ est inversible si et seulement si A l'est.
8. **Un lemme de transitivité.** Dans cette question, on note

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \neq 0 \right\}.$$

   (a) Montrer que $\forall X \in N, \exists T \in GL_n(\mathbb{R}) : C_1(T) = X$.
   (b) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists \Omega \in GL_n(\mathbb{R}) : \Omega X \in N$.
   (c) En déduire $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists Q \in GL_n(\mathbb{R}) : X = Qe_1$.
9. Soit $H \in \mathscr{R}$. En utilisant la question 3 et ce qui précède, montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que la matrice $Q^{-1}HQ$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(H) & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

   Dans la suite de cette partie, on fixe une telle matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, et un vecteur $V \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que l'on ait l'écriture par blocs $Q^{-1}HQ = \begin{pmatrix} \operatorname{tr}(H) & V^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
10. **Premier cas.** On suppose $\operatorname{tr}(H) \neq 0$.
    (a) Soit $W \in \mathbb{R}^{n-1}$.
    Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 1 & W^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible, et déterminer son inverse.
    (b) En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}HP = \operatorname{tr}(H)\, E_{1,1}$.
11. **Deuxième cas.** On suppose $\operatorname{tr}(H) = 0$.
    Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}HP = E_{1,2}$.
12. **Application : mise à jour de matrices inversibles.** Soit $H \in \overline{\mathscr{R}}$.
    (a) Montrer que $I_n + H$ est inversible si et seulement si $\operatorname{tr}(H) \neq -1$.
    (b) On suppose $\operatorname{tr}(H) \neq -1$. Montrer que $(I_n + H)^{-1} = I_n - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tr}(H)} H$.
    (c) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
       i. Montrer que $A + H$ est inversible si et seulement si $\operatorname{tr}(A^{-1}H) \neq -1$.
       ii. On suppose $\operatorname{tr}(A^{-1}H) \neq -1$. Exprimer $(A + H)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et H.

Partie III. Théorème d'Erdos (1967).

Cette partie est très largement indépendante de la précédente.

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *idempotente* si $M^2 = M$. L'ensemble de ces matrices sera noté $\mathscr{P}_n$.

On dira qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est *produit d'idempotentes* s'il existe $r \geqslant 1$ et $M_1, \ldots, M_r \in M_n(\mathbb{R})$ idempotentes telles que $A = M_1 \cdots M_r$. On notera $\mathscr{P}_n^\sharp$ l'ensemble des produits d'idempotentes.

Cet ensemble vérifiera donc notamment les propriétés $\mathscr{P}_n \subseteq \mathscr{P}_n^\sharp$ et $\forall A_1, A_2 \in \mathscr{P}_n^\sharp, A_1 A_2 \in \mathscr{P}_n^\sharp$, librement utilisables dans la suite.

Le but de cette partie est de montrer un théorème dû au mathématicien britannique John Erdos, affirmant que toute matrice non inversible est produit d'idempotentes.

13. Décrire l' intersection $\mathscr{P}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.
14. **Commutant d'une matrice de $\mathscr{R}$.** Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H = X\,Y^T \in \mathscr{R}$.
    Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ commutant avec H.
    Montrer que l'on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$, $Y^T A = \lambda Y^T$ et $AH = HA = \lambda H$.
    Indication. *On pourra notamment utiliser la question 3d.*
15. Soit $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\Omega - \Omega^2 \in \mathscr{R}$. On note $H = \Omega - \Omega^2$.
    (a) Montrer que l'on peut trouver $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\Omega X = \lambda X$, $Y^T \Omega = \lambda Y^T$ et $\lambda - \lambda^2 = \mathrm{tr}(H)$.
    (b) En déduire l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \theta & Y^T \\ X & \Omega \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathscr{P}_{n+1}$.
    (c) En déduire que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{P}_{n+1}^\sharp$.
16. Soit $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice d'opérations élémentaires (échange, transvection ou dilatation).
    (a) Montrer que $\Omega - \Omega^2 \in \overline{\mathscr{R}}$.
    (b) Dans quels cas a-t-on $\Omega - \Omega^2 = 0$?
    Montrer que dans ces cas, on a également $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}^\sharp$.

Ainsi, pour toute matrice d'opérations élémentaires $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{P}_{n+1}^\sharp$. Comme remarqué (mais pas vraiment démontré) en cours, l'algorithme du pivot de Gauss permet de décomposer toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ comme produit de matrices d'opérations élémentaires. On en déduit

$$\forall B \in GL_n(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}^\sharp.$$

17. (a) Soit $W \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & W^T \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}$.
    (b) En déduire que $\forall B \in GL_n(\mathbb{R}), \forall V \in \mathbb{R}^n$, $\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_{n+1}^\sharp$.
18. Dans cette question, on suppose simplement $n \geqslant 1$.
    Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ non inversible. En utilisant la question 8, montrer qu'il existe $P \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ 0 & B \end{pmatrix}$, pour un certain choix de $V \in \mathbb{R}^n$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$.
19. Achever la démonstration du théorème d'Erdos.