Sixième composition de mathématiques [corrigé]

Problème A.

Dans tout le problème, on considère deux fonctions continues $f, g : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

Le but du problème est de démontrer les deux résultats suivants (on proposera même deux démonstrations différentes du premier).

Théorème A. Il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Théorème B. On suppose par ailleurs g monotone. Alors il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c) = c$.

1. **Ensemble des points fixes.** On note $\Gamma = \left\{ x \in [0,1] \,\middle|\, g(x) = x \right\}$ l'ensemble des points fixes de g.

   (a) Montrer que Γ est non vide.

   La fonction $h : \begin{cases} [0,1] \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & g(x) - x \end{cases}$ *est continue, par opérations, sur l'intervalle* $[0,1]$.
   On a $h(0) = g(0) \geqslant 0$ *et* $h(1) = g(1) - 1 \leqslant 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc trouver $c \in [0,1]$ *tel que* $h(c) = 0$, *c'est-à-dire tel que* $g(c) = c$.
   Ainsi, $c \in \Gamma$, *ce qui conclut.*

   (b) Montrer que Γ est stable sous f, c'est-à-dire que $\forall x \in \Gamma, f(x) \in \Gamma$.

   Soit $x \in \Gamma$.
   Comme $f \circ g = g \circ f$, *on a* $g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = f(x)$, *donc* $f(x) \in \Gamma$.

   (c) Montrer que Γ est égal à son adhérence : $\Gamma = \overline{\Gamma}$.

   - *L'inclusion* $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$ *est générale.*
   - *Soit* $x \in \overline{\Gamma}$. *On peut donc trouver une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* Γ *telle que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
     Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a déjà $x \in [0,1]$.
     Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $g(u_n) = u_n$.
     Par continuité de g *en* x, *on a* $\underbrace{g(u_n)}_{=u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$.
     Par unicité de la limite, cela montre $g(x) = x$, *c'est-à-dire* $x \in \Gamma$.

   (d) En déduire que Γ possède un maximum et un minimum (éventuellement égaux).

   Nous allons montrer l'existence de $\max \Gamma$, *le cas du minimum étant en tout point semblable.*
   L'ensemble Γ *est non vide (grâce à la première question) et majoré (par* 1*), donc il admet une borne supérieure* $s = \sup \Gamma$.
   On sait que $s \in \overline{\Gamma}$. *Par la question précédente, cela entraîne* $s \in \Gamma$, *et donc que* s *est le maximum de* Γ.

Naturellement, ces résultats restent vrais pour l'ensemble $\Phi = \left\{ x \in [0,1] \,\middle|\, f(x) = x \right\}$ des points fixes de f. Ils pourront être librement utilisés dans la suite.

2. **Première démonstration du théorème A.**

   (a) Montrer que $f(\min\Gamma) \geqslant \min\Gamma$ et $f(\max\Gamma) \leqslant \max\Gamma$.

   D'après la question 1b, on a $f(\min\Gamma) \in \Gamma$. *Comme* $\min\Gamma$ *minore* Γ, *on en déduit l'inégalité* $f(\min\Gamma) \geqslant \min\Gamma$. *Le même raisonnement montre* $f(\max\Gamma) \leqslant \max\Gamma$.

   (b) En déduire qu'il existe $c \in [\min\Gamma, \max\Gamma]$ tel que $f(c) = g(c)$.

   La fonction $h : \begin{cases} [0,1] \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x) - g(x) \end{cases}$ *est continue, par opérations.*

   - ▸ • *On a* $f(\min\Gamma) \geqslant \min\Gamma$ *d'après la question précédente.*
     • *Par définition de* Γ, $g(\min\Gamma) = \min\Gamma$.

     On en déduit $h(\min\Gamma) = f(\min\Gamma) - g(\min\Gamma) = f(\min\Gamma) - \min\Gamma \geqslant 0$.
   - ▸ *Le même raisonnement montre* $h(\max\Gamma) \leqslant 0$.

   En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue h *sur l'intervalle* $[\min\Gamma, \max\Gamma]$, *on peut trouver* $c \in [\min\Gamma, \max\Gamma]$ *tel que* $h(c) = 0$, *ce qui montre* $f(c) = g(c)$.

3. **Seconde démonstration du théorème A.** On suppose dans cette question, par l'absurde, que $\forall x \in [0,1], f(x) \neq g(x)$.

   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est soit > 0 sur $[0,1]$, soit < 0 sur $[0,1]$.

   On continue à noter $h : \begin{cases} [0,1] \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x) - g(x), \end{cases}$ *qui est une fonction continue, par opérations.*
   Supposons par l'absurde le contraire de l'assertion à démontrer. On peut donc trouver $x_\pm \in [0,1]$ *tels que* $h(x_+) \geqslant 0$ *et* $h(x_-) \leqslant 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction continue h *sur le segment reliant* x_- *à* x_+, *on peut trouver* c *situé entre* x_- *et* x_+ *(et donc* a fortiori *élément de* $[0,1]$*) tel que* $h(c) = 0$, *c'est-à-dire* $f(c) = g(c)$.
   Cela contredit l'hypothèse générale de la question, et conclut la démonstration.

   Quitte à échanger f et g, on supposera dans la suite que $f - g > 0$.

   (b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], f(x) \geqslant g(x) + \delta$.

   On applique le théorème des bornes atteintes à la fonction continue $h = f - g$ *sur le segment* $[0,1]$ *: on peut trouver* $\sigma, \tau \in [0,1]$ *tels que*

   $$\forall x \in [0,1], f(\sigma) \leqslant f(x) \leqslant f(\tau).$$

   En particulier, en notant $\delta = f(\sigma)$, *qui est bien* > 0 *d'après la question précédente, on a démontré*

   $$\forall x \in [0,1], f(x) - g(x) > \delta,$$

   ce qui conclut.

   Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $g^n = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}$ les fonctions obtenues en composant n fois f et g avec elles-mêmes.

   (c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f^n(x) \geqslant g^n(x) + n\delta$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $P(n)$ *l'assertion* « $\forall x \in [0,1], f^n(x) \geqslant g^n(x) + n\delta$ ». *Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ *par récurrence.*

   Initialisation. *La question précédente démontre directement* $P(1)$.

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$. *Montrons* $P(n+1)$.

Soit $x \in [0,1]$. *On a*

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f^n\big(f(x)\big) \\ &\geqslant g^n\big(f(x)\big) + n\delta && \textit{(d'après } P(n)\textit{, appliquée à } f(x)\textit{)} \\ &\geqslant f\big(g^n(x)\big) + n\delta && \textit{(car } f \circ g = g \circ f\textit{, appliquée } n \textit{ fois)} \\ &\geqslant g\big(g^n(x)\big) + \delta + n\delta && \textit{(d'après la question préc. appliquée à } g^n(x)\textit{)} \\ &\geqslant g^{n+1}(x) + (n+1)\delta, \end{aligned}$$

ce qui montre $P(n+1)$, *et clôt la récurrence.*

(d) Conclure.

Le segment $[0,1]$ *est stable sous* f *et* g, *donc une récurrence immédiate montre que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $f^n(0)$ *et* $g^n(0) \in [0,1]$. *En particulier,*

$$\forall x \in [0,1]\,, f^n(0) - g^n(0) \leqslant 1.$$

Or, la question précédente (appliquée à $x = 0$*) montre que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(0) \geqslant g^n(0) + n\delta$.

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\delta \leqslant 1$, *ce qui est absurde (si* $n = \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1$, *par exemple, on a* $n \in \mathbb{N}^*$ *mais* $n > \frac{1}{\delta}$, *donc* $n\delta > 1$, *ce qui constitue une contradiction).*

4. **Démonstration du théorème B.**

(a) Dans cette question, on suppose g décroissante. Montrer que g possède un unique point fixe, et en déduire qu'il s'agit également d'un point fixe pour f.

- *D'après la question 1a, l'ensemble* Γ *est non vide, c'est-à-dire que* g *possède (au moins) un point fixe.*
  Soit maintenant $c_1 \leqslant c_2$ *deux points fixes de* g.
  Par décroissance de g, *on en déduit* $c_1 = g(c_1) \geqslant g(c_2) = c_2$.
  Les deux inégalités précédentes montrent $c_1 = c_2$, *ce qui achève la démonstration de l'unicité du point fixe de* g.
- *On a donc trouvé un élément* $c \in [0,1]$ *tel que* $\Gamma = \{c\}$.
  La propriété de stabilité sous f *de la question 1b entraîne alors* $f(c) \in \Gamma$, *c'est-à-dire* $f(c) = c$, *ce qui conclut.*

Dans la fin du problème, on suppose g croissante.

(b) Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n$ et $g(u_n) = u_{n+1}$.

On construit cette suite par récurrence : d'après la question 1a (ou plutôt son analogue pour l'ensemble Φ *des points fixes de* f*), on peut trouver* $u_0 \in \Phi$. *On définit alors une suite récurrente* u *en imposant* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$. *L'intervalle* $[0,1]$ *étant stable sous* g, *on en déduit* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$ *: la suite* u *est à valeurs dans* $[0,1]$.
Comme l'ensemble Φ *est stable sous* g *(c'est l'analogue de la question 1b), une récurrence immédiate montre* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \Phi$, *c'est-à-dire* $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_n$.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis convergente.

- *Supposons* $u_1 \leqslant u_0$.
  La croissance de g *entraîne* $u_2 = g(u_1) \leqslant g(u_0) = u_1$, *puis* $u_3 = g(u_2) \leqslant g(u_1) = u_2$ *et, par une récurrence immédiate,* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$.
  Dans ce cas, la suite u *est donc décroissante.*

- *Supposons* $u_1 \geqslant u_0$.
  Dans ce cas, la même démonstration montre que u *est croissante.*

Dans tous les cas, la suite u *est monotone. Puisqu'elle est à valeurs dans* $[0,1]$, *la suite* u *est par ailleurs bornée.*
Le théorème de la limite monotone entraîne alors la convergence de u.

(d) Conclure.

D'après la question précédente, on peut trouver $\ell \in \mathbb{R}$ *telle que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. *Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a nécessairement* $\ell \in [0,1]$.

- *Comme* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \Phi$, *on a automatiquement* $\ell \in \overline{\Phi}$. *La question 1b (ou plutôt son analogue concernant* f, *c'est-à-dire l'égalité* $\overline{\Phi} = \Phi$*) entraîne alors* $\ell \in \Phi$, *c'est-à-dire* $f(\ell) = \ell$.
- *Par continuité de* g, *la convergence* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ *entraîne* $u_{n+1} = g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(\ell)$.
  Par extraction, on a par ailleurs $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
  Par unicité de la limite, $g(\ell) = \ell$.

On a donc trouvé $\ell \in [0,1]$ *tel que* $f(\ell) = g(\ell) = \ell$, *ce qui conclut.*

Problème B.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la suite $u(\alpha) = \big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0(\alpha) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(\alpha) = \frac{u_n(\alpha)^2}{n+1}.$$

On pourra utiliser sans démonstration la propriété $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) > 0$, obtenue par une récurrence très simple.

On va étudier, en fonction de α, le comportement de la suite récurrente $\big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie I. Un produit infini.

Dans cette partie, on montre que la suite de produits $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\prod_{k=1}^{n} k^{2^{-k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel strictement positif, que l'on notera $\prod_{k=1}^{+\infty} k^{2^{-k}}$ dans la fin du problème.

On fixe une fois pour toutes un réel $\lambda \in \,]1,2[$.

1. Donner l'expression de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite converge vers une limite que l'on précisera.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k} &= \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} \\ &= \lambda^{-1} \frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}},\end{aligned}$$

   ce qui démontre $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}} = \frac{1}{\lambda-1}$, *par opérations.*

2. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a, d'après la relation de Chasles,*

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} \geqslant 0,$$

ce qui montre la croissance.

3. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{\ln(n)}{2^n} \leqslant \frac{1}{\lambda^n}$.

On a

$$\underbrace{\frac{\ln(n)}{2^n} \Big/ \frac{1}{\lambda^n}}_{q_n} = \frac{\ln(n)}{(2/\lambda)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

par croissances comparées.
On en déduit que la suite des quotients $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est* < 1 *à partir d'un certain rang, ce qui démontre l'existence d'un entier* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{\ln(n)}{2^n} < \frac{1}{\lambda^n}$, *et conclut.*

4. Déduire de ce qui précède la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et conclure.

- *Soit* $n \geqslant n_0$. *On a alors*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} &\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n_0}^{n} \underbrace{\frac{\ln(k)}{2^k}}_{\leqslant \frac{1}{\lambda^k}} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{\ln(k)}{2^k} + \frac{1}{\lambda-1},\end{aligned}$$

  la dernière inégalité provenant du fait que, la suite convergente $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant manifestement croissante, elle est partout inférieure ou égale à sa limite, précédemment déterminée.*
- *La suite croissante* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc majorée à partir d'un certain rang. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge : on peut trouver* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

- *Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que*

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} k^{2^{-k}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\exp\left(2^{-k}\ln(k)\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell} > 0,$$

  ce qui conclut.

Partie II. Généralités.

On fixe dans toute cette partie un nombre $\alpha > 0$.

5. Montrer que si la suite $\big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est nécessairement 0.

   Supposons que la suite converge : on peut donc trouver $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Notons que, par extraction, on a également $u_{n+1}(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

   Par opérations, on a par ailleurs $u_{n+1}(\alpha) = \dfrac{u_n(\alpha)^2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Par unicité de la limite, on en déduit $\ell = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $u_n(\alpha)$ pour que $u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha)$.

   On a la chaîne d'équivalences (en se souvenant que $u_n(\alpha) > 0$, comme cela a été rappelé en préambule) :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha) &\Leftrightarrow \frac{u_n(\alpha)^2}{n+1} \leqslant u_n(\alpha) \\ &\Leftrightarrow u_n(\alpha) \leqslant n+1. \end{aligned}$$

7. On suppose pouvoir trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0+1}(\alpha) \leqslant u_{n_0}(\alpha)$.

   (a) Montrer que $\forall n \geqslant n_0, u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha)$.

   Pour tout $n \geqslant n_0$, notons $P(n)$ l'assertion « $u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha)$ ».
   Montrons $\forall n \geqslant n_0, P(n)$ par récurrence.

   Initialisation. *L'hypothèse est directement l'assertion $P(n_0)$.*

   Hérédité. *Soit $n \geqslant n_0$ tel que $u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha)$.*
   D'après la question précédente, cela signifie $u_n(\alpha) \leqslant n+1$.
   On en déduit que $u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha) \leqslant n+1$, donc a fortiori $u_{n+1}(\alpha) \leqslant n+2$.
   D'après la question précédente, cela montre $u_{n+2}(\alpha) \leqslant u_{n+1}(\alpha)$, ce qui montre $P(n+1)$, et clôt la récurrence.

   (b) En déduire $u_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   La suite $\big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang d'après la question précédente, et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone entraîne donc qu'elle converge, et la question 5 entraîne $u_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Dans toute la suite, on note E_0 l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $u_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On note également $E_\infty = \mathbb{R}_+^* \setminus E_0$ le complémentaire de E_0.

8. Soit $\beta \in E_\infty$.

   (a) Montrer que la suite $\big(u_n(\beta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Supposons par l'absurde que $\big(u_n(\beta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas croissante. On peut donc trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0+1}(\beta) < u_{n_0}(\beta)$.
   D'après la question 7, cela entraîne $u_n(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc $\beta \in E_0$, ce qui contredit exactement l'hypothèse $\beta \in E_\infty$.

(b) En déduire $u_n(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Il est impossible que la suite $\big(u_n(\beta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En effet, la question 5 entraînerait que sa limite est nulle, c'est-à-dire $\beta \in E_0$. Cela contredit à nouveau l'hypothèse $\beta \in E_\infty$.
D'après le théorème de la limite monotone, le seul autre scénario possible est $u_n(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui conclut.

Partie III. Description de E_0 et E_∞.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $u_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto u_n(x) \end{cases}$ est continue, croissante et surjective.

La définition rend clair que $u_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$ (qui est bien continue, croissante et surjective) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n(x)^2}{n+1}$.

La fonction $y \mapsto \dfrac{y^2}{n+1}$ est clairement continue, croissante et surjective. Comme l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ continues, croissantes et surjectives est stable par composition, on en déduit immédiatement, par récurrence, la propriété voulue.

10. En déduire que $\forall \alpha \in E_0,]0, \alpha[\subseteq E_0$ et $\forall \beta \in E_\infty,]\beta, +\infty[\subseteq E_\infty$.

- *Soit $\alpha \in E_0$. Soit $x \in]0, \alpha[$.*
  La croissance des fonctions u_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) donne alors
  $$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n(x) \leqslant u_n(\alpha),$$
  et le théorème des gendarmes entraîne $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $x \in E_0$, ce qui conclut.
- *Le même argument (avec le théorème de minoration remplaçant le théorème des gendarmes) montre que $\forall \beta \in E_\infty,]\beta, +\infty[\subseteq E_\infty$.*

11. Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n(\beta) \geqslant n+2$. Montrer que $\beta \in E_\infty$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}(\beta) \geqslant n_0 + 2$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on note $P(n)$ l'assertion « $u_n(\beta) \geqslant n+2$ ». Montrons $\forall n \geqslant n_0, P(n_0)$.

Initialisation. *L'hypothèse donne directement l'assertion $P(n_0)$.*

Hérédité. *Soit $n \geqslant n_0$ tel que $P(n)$.*
On a $u_{n+1}(\beta) = \dfrac{u_n^2(\beta)}{n+1} \geqslant \dfrac{(n+2)^2}{n+1} \geqslant n+3$, car $(n+1)(n+3) = (n+2)^2 - 1 \leqslant (n+2)^2$.
Cela montre l'inégalité $P(n+1)$, et clôt la récurrence.

On a donc montré $\forall n \geqslant n_0, u_n(\beta) \geqslant n+2$, et le théorème de minoration entraîne $u_n(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et donc $\beta \in E_\infty$.

Dans toute la fin du problème, on pose $\gamma = \sup E_0$.

12. Justifier que γ est bien défini.

La question précédente montre qu'il existe $\beta \in E_\infty$. La question 10 montre alors $]\beta, +\infty[\subseteq E_\infty$ et donc $E_0 \subseteq]0, \beta]$, si bien que E_0 est majoré par β.
Par ailleurs, la question 7 montre que, comme $u_1(1) = u_0(1)$, on a $u_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $1 \in E_0$.
L'ensemble E_0 n'est donc pas vide.
La propriété de la borne supérieure entraîne alors la bonne définition de γ.

13. Montrer $]0,\gamma[\subseteq E_0$ et $]\gamma,+\infty[\subseteq E_\infty$.

► *Soit* $x \in]0,\gamma[$.
Comme γ *est le plus petit des majorants de* E_0*, le nombre* x *n'est pas un majorant de* E_0 *et on peut trouver* $\alpha > x$ *tel que* $\alpha \in E_0$.
D'après la question 10, on en déduit que $x \in E_0$.

► *Soit* $x \in]\gamma,+\infty[$.
Comme γ *majore* E_0*, on a* $x \notin E_0$*, c'est-à-dire* $x \in E_\infty$.

14. (a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\alpha \in E_0$;
   (ii) $\exists n \in \mathbb{N} : u_n(\alpha) \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$;
   (iii) $\exists n \in \mathbb{N} : u_n(\alpha) \in]0,1[$.

► *Supposons* $\alpha \in E_0$.
On a donc $u_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, donc* $u_n(\alpha) < \frac{1}{2}$ *à partir d'un certain rang.* A fortiori*, cela démontre l'existence d'un rang* $n \geqslant 1$ *tel que* $u_n(\alpha) \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$.

► *Il est clair que l'assertion (ii) entraîne (iii).*

► *Supposons pouvoir trouver* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n(\alpha) \in]0,1[$*. Ainsi,* $u_{n+1}(\alpha) = \frac{u_n(\alpha)^2}{n+1} \leqslant u_n(\alpha)$.
La question 7 montre alors que $u_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, c'est-à-dire* $\alpha \in E_0$.

(b) En déduire que, pour tout $\alpha \in E_0$, on peut trouver $\alpha' > \alpha$ tel que $\alpha' \in E_0$.

Soit $\alpha \in E_0$*. D'après la question précédente, on peut trouver* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n(\alpha) < \frac{1}{2}$.
Par surjectivité de la fonction u_n*, on peut trouver* $\alpha' > 0$ *tel que* $u_n(\alpha) = \frac{1}{2}$.
On a nécessairement $\alpha' > \alpha$ *car, par croissance de* u_n*, l'inégalité contraire* $\alpha' \leqslant \alpha$ *entraînerait* $\frac{1}{2} = u_n(\alpha') \leqslant u_n(\alpha)$*, ce qui est absurde.*
La question précédente (et l'inégalité $\frac{1}{2} = u_n(\alpha) < 1$*) entraîne alors* $\alpha' \in E_0$*, ce qui conclut.*

(c) Montrer $E_0 =]0,\gamma[$ et $E_\infty = [\gamma,+\infty[$.

On sait déjà que E_0 *et* E_∞ *sont complémentaires dans* $\mathbb{R}_+^*$*, et que* $]0,\gamma[\subseteq E_0$ *et* $]\gamma,+\infty[\subseteq E_\infty$.
Les égalités à démontrer équivalent donc à l'appartenance $\gamma \in E_\infty$.
Or, si l'on avait $\gamma \in E_0$*, on aurait* $E_0 =]0,\gamma]$*, qui admettrait donc un maximum (à savoir* γ*). Cela contredirait directement la question précédente.*

Partie IV. Équivalents et détermination de γ.

15. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 < u_n(\gamma) \leqslant n+2$.

► *La contraposée de la question 7 montre que l'on a* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\gamma) > n+1$.

► *Supposons par l'absurde qu'il existe un entier* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n(\gamma) > n+2$*. Par surjectivité de* u_n*, on peut trouver* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $u_n(\beta) = n+2$*, et la question 11 entraîne* $\beta \in E_\infty$.
La propriété de γ *entraîne alors* $\gamma \leqslant \beta$ *et, par croissance de* u_n*,*

$$n+2 < u_n(\gamma) \leqslant u_n(\beta) = n+2,$$

ce qui fournit la contradiction souhaitée.

(b) En déduire un équivalent de $\big(u_n(\gamma)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

La question précédente donne $u_n(\gamma) = n + O(1)$*, donc* $u_n(\gamma) = n + o(n)$*, ce qui équivaut à* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

(c) Montrer que $u_n(\gamma) = n + 2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Comme le suggère l'énoncé, on introduit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(n+2-u_n(\gamma)\big)_{n\in\mathbb{N}}$*, si bien que l'on a déjà* $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n \in [0,1]$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= n+3-\frac{u_n(\gamma)^2}{n+1} \\
&= n+3-\frac{(n+2-\varepsilon_n)^2}{n+1} \\
&= n+3-\left[(n+1)+2(1-\varepsilon_n)+\frac{(1-\varepsilon_n)^2}{n+1}\right] \\
&= 2\varepsilon_n - \frac{(1-\varepsilon_n)^2}{n+1} \\
&\geqslant 2\varepsilon_n - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Si l'on trouvait un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\varepsilon_{n_0} \geqslant \dfrac{1}{n_0+1}$*, la relation que l'on vient de dégager montrerait* $\varepsilon_{n_0+1} \geqslant \varepsilon_{n_0}$ *et,* a fortiori*,* $\varepsilon_{n_0+1} \geqslant \dfrac{1}{n_0+2}$.

On en déduirait facilement par récurrence que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *serait croissante à partir du rang* n_0*, et donc convergente :* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \geqslant \varepsilon_{n_0} > 0$.

Or, l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}, 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ *entraînerait par passage à la limite* $\ell \leqslant 0$*, ce qui est exclu.*

On a donc montré par l'absurde $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$*, ce qui entraîne* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, et conclut.*

16. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_n(x)}{u_n(\gamma)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{2^n}$.

Cette suite vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(\gamma)} = \left(\dfrac{u_n(x)}{u_n(\gamma)}\right)^2$*, donc une récurrence immédiate permet d'en déduire*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n(x)}{u_n(\gamma)} = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{2^n}.$$

L'équivalent $u_n(\gamma) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ *conclut alors.*

17. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\ln u_n(\alpha) = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$ si et seulement si $\alpha = \gamma$.

- *L'équivalent* $u_n(\gamma) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ *donne* $\ln u_n(\gamma) = \ln(n) + o(1)$*, et donc* $\ln u_n(\gamma) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$*, ce qui entraîne* $\ln u_n(\gamma) = o(2^n)$.
- *Réciproquement, si* $x \neq \gamma$*, l'équivalent* $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{2^n}$ *de la question précédente donne*

$$\ln u_n(\gamma) = 2^n \ln\left(\frac{x}{\gamma}\right) + o(1) \qquad \textit{donc} \qquad \ln u_n(\gamma) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \underbrace{\ln\left(\frac{x}{\gamma}\right)}_{\neq 0}$$

$$\textit{donc} \qquad \ln u_n(\gamma) \neq o(2^n).$$

18. Trouver une expression de $\left(\dfrac{\ln u_{n+1}(\gamma)}{2^{n+1}} - \dfrac{\ln u_n(\gamma)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $\gamma = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} k^{2^{-k}}$.

- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned}\frac{\ln u_{n+1}(\gamma)}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n(\gamma)}{2^n} &= \frac{\ln\left(\frac{u_n(\gamma)^2}{n+1}\right)}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n(\gamma)}{2^n} \\ &= \frac{2\ln u_n(\gamma) - \ln(n+1)}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n(\gamma)}{2^n} \\ &= -\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

- *Par télescopage, on en déduit que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{\ln u_n(\gamma)}{2^n} - \ln\gamma &= -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(j+1)}{2^{j+1}} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\end{aligned}$$

- *La question précédente entraîne notamment que* $\dfrac{\ln u_n(\gamma)}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *d'où l'on déduit*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\gamma.$$

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit

$$\prod_{k=1}^{n} k^{2^{-k}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma.$$

Par unicité de la limite et en utilisant la notation introduite lors de la première partie, cela équivaut à l'égalité

$$\gamma = \prod_{k=1}^{+\infty} k^{2^{-k}}.$$