Sixième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ ou de souligner vos résultats. Je me réserve le droit de ne pas lire les parties de votre copie qui contreviendront à cette consigne.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*

Problème A.

Dans tout le problème, on considère deux fonctions continues $f, g : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

Le but du problème est de démontrer les deux résultats suivants (on proposera même deux démonstrations différentes du premier).

Théorème A. Il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Théorème B. On suppose par ailleurs g monotone. Alors il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c) = c$.

À l'exception de la première, les quatre questions sont assez largement indépendantes les unes des autres.

1. **Ensemble des points fixes.** On note $\Gamma = \left\{x \in [0,1] \,\middle|\, g(x) = x\right\}$ l'ensemble des points fixes de g.
   (a) Montrer que Γ est non vide.
   (b) Montrer que Γ est stable sous f, c'est-à-dire que $\forall x \in \Gamma, f(x) \in \Gamma$.
   (c) Montrer que Γ est égal à son adhérence : $\Gamma = \overline{\Gamma}$.
   (d) En déduire que Γ possède un maximum et un minimum (éventuellement égaux).

   Naturellement, ces résultats restent vrais pour l'ensemble $\Phi = \left\{x \in [0,1] \,\middle|\, f(x) = x\right\}$ des points fixes de f. Ils pourront être librement utilisés dans la suite.
2. **Première démonstration du théorème A.**
   (a) Montrer que $f(\min \Gamma) \geqslant \min \Gamma$ et $f(\max \Gamma) \leqslant \max \Gamma$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in [\min \Gamma, \max \Gamma]$ tel que $f(c) = g(c)$.
3. **Seconde démonstration du théorème A.** On suppose dans cette question, par l'absurde, que $\forall x \in [0,1], f(x) \neq g(x)$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est soit > 0 sur $[0,1]$, soit < 0 sur $[0,1]$.

   Quitte à échanger f et g, on supposera dans la suite que $f - g > 0$.

   (b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], f(x) \geqslant g(x) + \delta$.

   Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $g^n = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}$ les fonctions obtenues en composant n fois f et g avec elles-mêmes.

   (c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f^n(x) \geqslant g^n(x) + n\delta$.
   (d) Conclure.
4. **Démonstration du théorème B.**
   (a) Dans cette question, on suppose g décroissante. Montrer que g possède un unique point fixe, et en déduire qu'il s'agit également d'un point fixe pour f.

   Dans la fin du problème, on suppose g croissante.

   (b) Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n$ et $g(u_n) = u_{n+1}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis convergente.
   (d) Conclure.

Problème B.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la suite $u(\alpha) = \big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0(\alpha) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(\alpha) = \frac{u_n(\alpha)^2}{n+1}.$$

On pourra utiliser sans démonstration la propriété $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) > 0$, obtenue par une récurrence très simple.

On va étudier, en fonction de α, le comportement de la suite récurrente $\big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie I. Un produit infini.

Dans cette partie, on montre que la suite de produits $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\prod_{k=1}^{n} k^{2^{-k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel strictement positif, que l'on notera $\prod_{k=1}^{+\infty} k^{2^{-k}}$ dans la fin du problème.

On fixe une fois pour toutes un réel $\lambda \in \,]1,2[$.

1. Donner l'expression de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite converge vers une limite que l'on précisera.
2. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \frac{\ln(n)}{2^n} \leqslant \frac{1}{\lambda^n}$.
   On pourra utiliser un théorème général sur les suites convergentes.
4. Déduire de ce qui précède la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et conclure.

Partie II. Généralités.

On fixe dans toute cette partie un nombre $\alpha > 0$.

5. Montrer que si la suite $\big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est nécessairement 0.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $u_n(\alpha)$ pour que $u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha)$.
7. On suppose pouvoir trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0+1}(\alpha) \leqslant u_{n_0}(\alpha)$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant n_0, u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha)$.
   (b) En déduire $u_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Dans toute la suite, on note E_0 l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $u_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On note également $E_\infty = \mathbb{R}_+^* \setminus E_0$ le complémentaire de E_0.

8. Soit $\beta \in E_\infty$.
   (a) Montrer que la suite $\big(u_n(\beta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) En déduire $u_n(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Partie III. Description de E_0 et E_∞.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $u_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto u_n(x) \end{cases}$ est continue, croissante et surjective.
10. En déduire que $\forall \alpha \in E_0,]0, \alpha[\subseteq E_0$ et $\forall \beta \in E_\infty,]\beta, +\infty[\subseteq E_\infty$.
11. Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n(\beta) \geqslant n+2$. Montrer que $\beta \in E_\infty$.

Dans toute la fin du problème, on pose $\gamma = \sup E_0$.

12. Justifier que γ est bien défini.
13. Montrer $]0, \gamma[\subseteq E_0$ et $]\gamma, +\infty[\subseteq E_\infty$.
14. (a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
    (i) $\alpha \in E_0$;
    (ii) $\exists n \in \mathbb{N} : u_n(\alpha) \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$;
    (iii) $\exists n \in \mathbb{N} : u_n(\alpha) \in]0, 1[$.
    (b) En déduire que, pour tout $\alpha \in E_0$, on peut trouver $\alpha' > \alpha$ tel que $\alpha' \in E_0$.
    (c) Montrer $E_0 =]0, \gamma[$ et $E_\infty = [\gamma, +\infty[$.

Partie IV. Équivalents et détermination de γ.

15. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 < u_n(\gamma) \leqslant n+2$.
    (b) En déduire un équivalent de $\big(u_n(\gamma)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
    (c) Montrer que $u_n(\gamma) = n + 2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
    On pourra introduire la suite des différences $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(n+2-u_n(\gamma)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, *puis démontrer l'inégalité* $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_{n+1} \geqslant 2\varepsilon_n - \dfrac{1}{n+1}$.
16. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_n(x)}{u_n(\gamma)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{2^n}$.
17. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\ln u_n(\alpha) = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$ si et seulement si $\alpha = \gamma$.
18. Trouver une expression de $\left(\dfrac{\ln u_{n+1}(\gamma)}{2^{n+1}} - \dfrac{\ln u_n(\gamma)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $\gamma = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} k^{2^{-k}}$.