Septième composition de mathématiques [corrigé]

Problème A. Sous-espaces stables d'un endomorphisme.

Dans tout le problème, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

Étant donné un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E,

- on dit qu'un sous-espace vectoriel F de E *est stable sous* u si $\forall x \in F, u(x) \in F$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(u) = \{x \in E \,|\, u(x) = \lambda x\}$.

Partie I. Généralités.

Dans cette partie, on fixe un endomorphisme u d'un espace vectoriel E.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables sous u.
   (a) Montrer que $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables sous u.

   - *L'intersection* $F \cap G$ *et la somme* $F + G$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E, *d'après le cours.*
   - *Montrons la stabilité de* $F \cap G$. *Soit* $x \in F \cap G$.
     - *Comme* $x \in F$ *et que* F *est stable, on a* $u(x) \in F$.
     - *Exactement de même,* $u(x) \in G$.

     On en déduit $u(x) \in F \cap G$, *ce qui conclut.*
   - *Montrons la stabilité de* $F + G$. *Soit* $x \in F + G$.
     On peut donc trouver $x_F \in F$ *et* $x_G \in G$ *tels que* $x = x_F + x_G$.
     Comme au point précédent, les hypothèses entraînent $u(x_F) \in F$ *et* $u(x_G) \in G$.
     Ainsi, $u(x_F + x_G) = \underbrace{u(x_F)}_{\in F} + \underbrace{u(x_G)}_{\in G} \in F + G$, *ce qui conclut.*

   (b) $F \cup G$ est-il en général un sous-espace vectoriel de E stable sous u ?

   Non, car $F \cup G$ *n'est même pas en général un sous-espace vectoriel de* E.
   On a vu dans le cours le contre-exemple de $F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *et* $G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ *dans* $E = \mathbb{R}^2$ *(qui sont par exemple trivialement stables sous l'endomorphisme* $u = \mathrm{id}_E$*).*

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

   Il suffit de remarquer que $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

   (b) Montrer que tout sous-espace vectoriel de $E_\lambda(u)$ est stable sous u.

   Soit F *un sous-espace vectoriel de* $E_\lambda(u)$. *Soit* $x \in F$.
   On a donc $u(x) = \lambda x \in F$, *par stabilité par combinaison linéaire de* F.

3. Soit E un espace vectoriel, possédant trois sous-espaces vectoriels F, G_1 et G_2.
   On suppose $G_1 \subseteq G_2$ et $\begin{cases} F + G_1 = E \\ F \cap G_2 = \{0_E\}. \end{cases}$
   Montrer $G_1 = G_2$ et $E = F \oplus G$ (où l'on a noté $G = G_1 = G_2$).

- *L'inclusion* $G_1 \subseteq G_2$ *est une hypothèse.*
- *Soit* $x \in G_2$. A fortiori, $x \in E$, *donc on peut trouver* $x_F \in F$ *et* $x_G \in G_1$ *tels que* $x = x_F + x_G$. *L'inclusion* $G_1 \subseteq G_2$ *montre que* $x_G \in G_2$.
  On en déduit que $\underbrace{x_F}_{\in F} = \underbrace{x - x_G}_{\in G_2}$. *Comme* $F \cap G_2 = \{0_E\}$, *on en déduit que* $x_F = 0$.
  Ainsi, $x = x_G \in G_1$, *ce qui conclut la démonstration de* $G_2 \subseteq G_1$.
- *Maintenant que* $G_1 = G_2 (= G)$, *les hypothèses donnent immédiatement* $E = F \oplus G$.

Partie II. Un exemple concret.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ X \mapsto AX \end{cases}$ l'endomorphisme canoniquement associé.

4. (a) Calculer A^2.

   On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 20 \\ 5 & -6 & -20 \\ -5 & 10 & 24 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire $u^2 = 5u + \beta \,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, où $\beta \in \mathbb{R}$ est un nombre que l'on déterminera.

   On constate que $A^2 = 5A - 6I_3$. *On en déduit (en notant systématiquement* φ_M *l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice* $M \in M_3(\mathbb{R})$*) :*

   $$u^2 = \varphi_A^2 = \varphi_{A^2} = \varphi_{5A-6I_3} = 5\varphi_A - 6\varphi_{I_3} = 5u - 6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3},$$

   ce qui répond à la question (avec $\beta = -6$*).*

   (c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, on a $E_\lambda(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. *Soit* $x \in E_\lambda(u)$.
   On a donc $u(x) = \lambda x$ *puis, en réappliquant* u, $u^2(x) = u\big(u(x)\big) = \lambda^2 x$. *Il vient donc*

   $$\begin{aligned} u^2(x) = 5u(x) - 6x \qquad &\textit{donc} \qquad \lambda^2 x = 5\lambda x - 6x \\ &\textit{donc} \qquad (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x = 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

   Comme $\lambda \notin \{2, 3\}$ *et que* $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$, *on a* $\lambda^2 - 5\lambda + 6 \neq 0$.
   On a donc $x = 0_E$, *ce qui conclut (car l'inclusion réciproque* $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subseteq E_\lambda(u)$ *est automatique, on ne fera plus ce genre de remarques).*

5. (a) Déterminer un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_3(u) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et dont la première coordonnée vaut 1.

   - *Soit* $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *On a*

   $$\begin{aligned} u(v) = v \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (A - 3I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b+4c=0 \\ a \quad -3b-4c=0 \\ -a \ +2b+3c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a- \ b \ -2c=0 \\ \quad -2b-2c=0 \\ \quad \ b \ + \ c \ =0 \end{cases} \qquad \left[L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1\right] \textit{ puis } \begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \quad -c=0 \\ \quad b+c=0 \\ \qquad 0=0 \end{cases} \qquad \left[L_2 \leftrightarrow L_3\right] \textit{ puis } \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{bmatrix}$$

donc

$$E_3(u) = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ -c \\ c \end{pmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui conclut, avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(pour respecter la demande de l'énoncé).*

(b) On pose $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(v_2, v_3) \subseteq E_2(u)$.

Un calcul direct montre que $u(v_2) = 2v_2$ *et* $u(v_3) = 2v_3$. *Cela signifie* $v_2, v_3 \in E_2(u)$.
Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit $\mathrm{Vect}(v_2, v_3) \subseteq E_2(u)$.

(c) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
*(**Indication.** On pourra par exemple se ramener à un système de Cramer.)*

Soit $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. *On a donc*

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct (avec les « bimatrices ») montre que M *est inversible, si bien que le système linéaire précédent est de Cramer.*
On peut donc trouver un unique triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = w$, *ce qui montre que* (v_1, v_2, v_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

(d) En déduire $\mathbb{R}^3 = E_3(u) \oplus E_2(u)$.

- *On a montré* $\mathrm{Vect}(v_2, v_3) \subseteq E_2(u)$.
- *Comme* (v_1, v_2, v_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$, *on a* $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathrm{Vect}(v_1)}_{=E_3(u)} \oplus \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$.

  A fortiori, $\mathbb{R}^3 = E_3(u) + \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$.
- *Montrons* $E_3(u) \cap E_2(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. *Soit* $x \in E_3(u) \cap E_2(u)$.
  On a donc $u(x) = 3x$ *et* $u(x) = 2x$. *En faisant la différence,* $0_{\mathbb{R}^3} = x$.

Les trois points précédents sont les hypothèses de la question 3, appliquée à $E = \mathbb{R}^3$, $F = E_3(u)$, $G_1 = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ *et* $G_2 = E_2(u)$. *D'après cette question, on a donc* $\mathrm{Vect}(v_2, v_3) = E_2(u)$ *et* $\mathbb{R}^3 = E_3(u) \oplus E_2(u)$.

6. Montrer que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables sous u sont les sous-espaces vectoriels de la forme $F \oplus G$, où F est un sous-espace vectoriel de $E_3(u)$ et G est un sous-espace vectoriel de $E_2(u)$.

- *Ces sous-espaces sont bel et bien stables, d'après les questions 2b et 1a.*
- *Soit* $V \subseteq \mathbb{R}^3$ *un sous-espace stable sous* u. *On peut définir* $F = V \cap E_3(u)$ *et* $G = V \cap E_2(u)$, *qui sont bien, respectivement, des sous-espaces vectoriels de* $E_3(u)$ *et* $E_2(u)$.
  Montrons $V = F \oplus G$.
  - *Comme* $E_3(u) \cap E_2(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, *on a* a fortiori $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
  - *Reste à montrer (c'est là qu'il y a une preuve à faire, car ça n'est pas automatique !) l'égalité* $V = F \oplus G$. *Comme* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E, *l'inclusion réciproque est claire, si bien que l'on se concentre sur l'inclusion directe. Soit* $x \in V$.
    On peut donc trouver $x_3 \in E_3(u)$ *et* $x_2 \in E_2(u)$ *tels que* $x = x_3 + x_2$.
    L'enjeu est de montrer que ces deux composantes appartiennent encore à V.
    En appliquant u, *il vient* $\underbrace{u(x)}_{\in V} = u(x_3) + u(x_2) = 3x_3 + 2x_2$.
    Ainsi, $x_3 = u(x) - 2x \in V$ *et* $x_2 = 3x - u(x)$ *appartiennent à* V, *par stabilité par combinaison linéaire.*
    On en déduit $x_3 \in V \cap E_3(u) = F$ *et* $x_2 \in V \cap E_2(u) = G$, *si bien que*
    $$x = \underbrace{x_3}_{\in F} + \underbrace{x_2}_{\in G} \in F + G,$$
    ce qui conclut.

Partie III. Opérateur d'Abel.

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 1$, et on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit

$$u : \begin{cases} E \to & E \\ P \mapsto P'(X+1). \end{cases}$$

7. Montrer que u est un endomorphisme bien défini de E.

- *Déjà* u *est bien défini car, pour tout* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, *on a* $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, *puis* $\deg P'(X+1) = \deg P'$ *par composition par le polynôme non constant* $X+1$, *donc* $P'(X+1) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, *et donc* a fortiori $P'(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.
- *Montrons à la main la linéarité de* u.
  - *Soit* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a* $(\lambda P)' = \lambda P'$ *par linéarité de la dérivation, puis*
    $$u(P) = (\lambda P)'(X+1) = (\lambda P')(X+1) = \lambda P'(X+1) = \lambda u(P).$$
  - *Soit* $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. *On a* $(P+Q)' = P' + Q'$ *par linéarité de la dérivation, puis*
    $$u(P+Q) = (P+Q)'(X+1) = (P'+Q')(X+1) = P'(X+1) + Q'(X+1) = u(P) + u(Q).$$

Dans la suite de cette partie, on définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ par

$$A_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour } k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

8. (a) Montrer que $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

   - *Si* $k = 0$*, on a* $\deg A_0 = \deg 1 = 0$.
   - *Si* $k > 0$*, on a* $\deg A_k = \deg\left(X(X-k)^{k-1}\right) = 1 + (k-1) = k$ *par les formules pour le degré d'un produit.*

   Ainsi, la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ *est échelonnée au sens fort, et donc une base de* $\mathbb{R}_n[X]$*.*

   (b) Étant donné $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\mathrm{Vect}(A_0, A_1, \dots, A_k)$.

   Le même argument montre que $(A_0, A_1, \dots, A_k)$ *est échelonnée au sens fort, donc est une base de* $\mathbb{R}_k[X]$. A fortiori, *on a* $\mathrm{Vect}(A_0, A_1, \dots, A_k) = \mathbb{R}_k[X]$.

   (c) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $u(A_k)$.

   Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

   - *Clairement, si* $k = 0$, $u(A_0) = u(1) = 0$.
   - *Tout aussi clairement, si* $k = 1$, $u(A_1) = u(X) = 1 = A_0$.
   - *Supposons maintenant* $k \geqslant 2$*. La dérivée de* $X(X-k)^{k-1}$ *est*

   $$(X-k)^{k-1} + (k-1)X(X-k)^{k-2} = (X-k)^{k-2}\left[(X-k) + (k-1)X\right] = kX(X-k)^{k-2},$$

   si bien que

   $$u(A_k) = \frac{kX(X-k)^{k-2}}{k!} = \frac{X(X-k)^{k-2}}{(k-1)!} = A_{k-1}.$$

   In fine, $\forall k \in [\![0, n]\!], u(A_k) = \begin{cases} 0 & \textit{si } k = 0 \\ A_{k-1} & \textit{sinon.} \end{cases}$

9. (a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg u(P) = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } \deg P \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } \deg P \leqslant 0. \end{cases}$

   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Comme $X+1$ *est non constant, on a* $\deg u(P) = \deg P'(X+1) = \deg P' \times \deg(X+1) = \deg P'$, *et le cours sur la dérivation des polynômes conclut.*

   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   La question précédente entraîne que u induit une application $u_k : \mathbb{R}_k[X] \to \mathbb{R}_{k-1}[X]$, dont on admet qu'elle est linéaire. Montrer que u_k est surjective.

   L'application linéaire u_k *envoie la base* $(A_0, A_1, \dots, A_k)$ *de* $\mathbb{R}_k[X]$ *sur la famille* $(0, A_0, \dots, A_{k-1})$*, qui engendre* $\mathbb{R}_{k-1}[X]$*, car*

   $$\mathrm{Vect}(0, A_0, \dots, A_{k-1}) = \mathrm{Vect}(A_0, \dots, A_{k-1}) = \mathbb{R}_{k-1}[X].$$

   On en déduit que u_k *est surjective.*

10. Montrer que les sous-espaces vectoriels stables sous u sont $\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et les $\mathbb{R}_k[X]$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

   - *La question 9a montre que ces espaces sont bel et bien stables.*
   - *Réciproquement, soit* F *un sous-espace vectoriel stable sous* u*, que l'on suppose non réduit à l'espace nul* $\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$*. Le sous-espace vectoriel* F *contient donc un polynôme non nul* P*.*
     Considérons un tel polynôme $P \in F$ *de degré maximal, que l'on notera* $k \in \mathbb{N}$*.*
     - *La maximalité dit exactement que* $\forall Q \in F, \deg Q \leqslant k$*, c'est-à-dire que* $F \subseteq \mathbb{R}_k[X]$*.*

- *Montrons l'inclusion réciproque.*
  Par stabilité sous u *(appliquée de façon répétée), le sous-espace vectoriel* F *contient toutes les images* $u^i(P)$ *(pour* $i \in \mathbb{N}$*). Quand* $i \leqslant k$*, la question 9a entraîne que* $\deg u^i(P) = k - i$.
  Ainsi, la famille $\mathscr{O} = \big(u^k(P), u^{k-1}(P), \dots, u^1(P), \underbrace{u^0(P)}_{=P}\big)$ *est échelonnée au sens fort, si bien qu'il s'agit d'une base de* $\mathbb{R}_k[X]$.
  On a donc $\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(\mathscr{O}) \subseteq F$*, par stabilité par combinaison linéaire, ce qui conclut.*

Partie IV. Opérateur d'Euler.

Là encore, on fixe un entier $n \geqslant 1$, et on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit ici

$$u : \begin{cases} E \to & E \\ P \mapsto X\,P'(X), \end{cases}$$

dont on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un endomorphisme de E.

Par ailleurs, étant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit son *support*

$$S(P) = \Big\{ i \in [\![0, n]\!] \,\Big|\, \mathrm{coeff}_i(P) \neq 0 \Big\} \subseteq [\![0, n]\!].$$

11. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, calculer $u(X^i)$.

    Soit $i \in \mathbb{N}$*. On a (en traitant à part le cas du degré nul)* $u(X^i) = i\,X^i$.

Pour toute partie $I \subseteq [\![0, n]\!]$, on définit

$$F_I = \big\{ P \in E \,\big|\, S(P) \subseteq I \big\}.$$

12. Soit $I \subseteq [\![0, n]\!]$.

    (a) Montrer que F_I est un sous-espace vectoriel de E, et en donner (sans justification) une base.

    On va le faire de façon chic.
    Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$*, l'application* $\mathrm{coeff}_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ *est une forme linéaire, donc son noyau*

    $$\ker \mathrm{coeff}_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \mathrm{coeff}_i(P) = 0\}$$

    est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
    Par intersection,

    $$F_I = \bigcap_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \notin I}} \ker \mathrm{coeff}_i$$

    est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
    On voit qu'une base de F_I *est donnée par la famille* $\mathscr{B}_I = (X^i)_{i \in I}$ *: l'aspect générateur est une conséquence plus ou moins directe de la définition, et* $\mathscr{B}_I$ *est libre en tant que sous-famille de la base canonique.*

    (b) Montrer que F_I est un sous-espace vectoriel stable sous u.

    Le calcul effectué sur la base canonique montre par linéarité que, pour tous $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

    $$u\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\,X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} i\,\lambda_i\,X^i.$$

Soit $P \in F_I$. *On peut donc écrire* $P = \sum_{i \in I} \lambda_i X^i$, *où* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *est une famille de scalaires.*

On a alors $u(P) = \sum_{i\in I} i\,\lambda_i X^i$, *ce qui montre que* $u(P) \in F_I$.

(Ça n'était pas demandé, mais on a même la formule générale $S\big(u(P)\big) = S(P) \setminus \{0\}$.*)*

(c) Combien y a-t-il de sous-espaces vectoriels de ce type ?

On voit facilement que, si $I, J \subseteq [\![0, n]\!]$ *sont deux parties, alors* $F_I = F_J$ *si et seulement si* $I = J$. *(En effet, étant donné* $i \in [\![0, n]\!]$, *on voit que* $X^i \in F_I$ *si et seulement si* $i \in I$, *ce qui conclut rapidement).*
D'après le principe de bijection, il y a donc autant de sous-espaces vectoriels de ce type que de parties de $[\![0, n]\!]$, *c'est-à-dire* 2^{n+1}.

13. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $i, j \in [\![0, n]\!]$ deux indices différents.
Montrer qu'il existe $Q \in \operatorname{Vect}\big(P, u(P)\big)$ tel que $\operatorname{coeff}_i(Q) = \operatorname{coeff}_i(P)$ et $\operatorname{coeff}_j(Q) = 0$.

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et tout* $k \in [\![0, n]\!]$, *on a*

$$\operatorname{coeff}_k\big(\alpha P + \beta u(P)\big) = \alpha \operatorname{coeff}_k(P) + \beta \operatorname{coeff}_k\big(u(P)\big) = (\alpha + k\beta)\operatorname{coeff}_k(P).$$

Comme $i \neq j$, *la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & j \end{pmatrix}$ *est inversible, donc le système linéaire*

$$\begin{cases} \lambda + i\mu = 1 \\ \lambda + j\mu = 0 \end{cases}$$

est de Cramer.
On peut donc lui trouver une solution (α, β), *et le polynôme* $Q = \alpha P + \beta u(P) \in \operatorname{Vect}\big(P, u(P)\big)$ *convient.*

14. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables sous u.

Soit F *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_n[X]$ *stable sous* u. *On va montrer que* F *est l'un des sous-espaces vectoriels* F_I *définis plus tôt, ce qui conclura.*
Soit $I = \{i \in I \mid \exists P \in F : \operatorname{coeff}_i(P) \neq 0\}$.
Cette définition rend claire l'inclusion $F \subseteq F_I$, *si bien qu'il suffit de montrer l'inclusion réciproque. Comme* $F_I = \operatorname{Vect}\big(X^i\big)_{i\in I}$, *il suffit même, par stabilité par combinaison linéaire, de montrer les appartenances* $\forall i \in I, X^i \in F$.
Soit donc $i \in I$. *Par définition de* I, *cela signifie que* F *contient un polynôme* P *tel que* $\operatorname{coeff}_i(P) \neq 0$. *On choisit, parmi ces polynômes, un polynôme* P_0 *dont le cardinal du support* $s(P_0) = |S(P_0)|$ *soit le plus petit possible. Quitte à multiplier* P_0 *par un scalaire (ce qui ne changera pas son appartenance à* F*), on peut le supposer unitaire.*
On va montrer que $s(P_0) = 1$, *ce qui montrera que* $P_0 = X^i$, *et conclura.*
Supposons donc par l'absurde que $s(P_0) > 1$. *On peut donc trouver* $j \neq i$ *tel que* $\operatorname{coeff}_j(P) = 0$.
D'après la question 13, on peut trouver $Q \in \operatorname{Vect}\big(P_0, u(P_0)\big)$ *tel que* $\operatorname{coeff}_i(Q) = \operatorname{coeff}_i(P_0) \neq 0$ *et* $\operatorname{coeff}_j(Q) = 0$.

- *On a* $P_0 \in F$ *et* $u(P_0) \in F$ *par stabilité, donc* $Q \in F$ *par stabilité par combinaison linéaire.*
- *Pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$ *tel que* $\operatorname{coeff}_k(P_0) = 0$, *l'expression de* u *montre que* $\operatorname{coeff}_k\big(u(P_0)\big) = 0$, *si bien que* $\operatorname{coeff}_k(Q) = 0$. *Par contraposée, cela montre* $S(Q) \subseteq S(P_0)$.
- *Comme* $\operatorname{coeff}_j(Q) = 0 \neq \operatorname{coeff}_j(P)$, *on a* $j \notin S(P_0)$ *mais* $j \in S(Q)$.

Ces points montrent que $S(Q)$ *est strictement inclus dans* $S(P_0)$, *et donc que* $s(Q) < s(P_0)$, *ce qui contredit la définition de* P_0.

Problème B. Une équation différentielle avec retard.

Dans tout le problème, étant donné un nombre réel $a > 0$, on définit l'ensemble

$$\mathscr{S}_a = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) + a\, f(t-1) = 0 \right\}.$$

Partie I.

Dans toute cette partie, on fixe $a > 0$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_a$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$.

   ▶ *La fonction nulle appartient manifestement à $\mathscr{S}_a$.*

   ▶ *On utilise le raccourci standard : soit $f, g \in \mathscr{S}_a$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

   - *Par opérations, on a déjà $\lambda f + g \in C^1(\mathbb{R})$.*
   - *Soit $t \in \mathbb{R}$.*
     On a, notamment par linéarité de la dérivation :

     $$\begin{aligned}(\lambda f + g)'(t) + a\,(\lambda f + g)(t-1) &= \lambda f'(t) + g'(t) + \lambda\, a\, f(t-1) + a\, g(t-1) \\ &= \lambda \underbrace{\left(f'(t) + a\, f(t-1)\right)}_{=0} + \underbrace{\left(g'(t) + a\, g(t-1)\right)}_{=0} \\ &= 0,\end{aligned}$$

     ce qui montre $\lambda f + g \in \mathscr{S}_a$, et conclut.

2. Montrer que $\mathscr{S}_a \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$.

   Soit $f \in \mathscr{S}_a$. On va montrer $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, f \in C^n(\mathbb{R})$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion « $f \in C^n(\mathbb{R})$ ». Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ par récurrence.

   Initialisation. *Par définition de $\mathscr{S}_a$, on a déjà $f \in C^1(\mathbb{R})$, d'où $P(1)$.*

   Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$.*
   Comme $f \in \mathscr{S}_a$, on a que les fonctions f' et $t \mapsto a\, f(t-1)$ sont égales.
   D'après $P(n)$, on a $f \in C^n(\mathbb{R})$, donc $t \mapsto a\, f(t-1)$ est également de classe C^n, par opérations.
   L'égalité de fonctions que l'on vient de mentionner montre alors que f' est de classe C^n.
   On en déduit que f est de classe C^{n+1}, ce qui montre $P(n+1)$, et clôt la récurrence.

3. Soit $f \in \mathscr{S}_a$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\forall t \in [t_0, +\infty[\,, f(t) \neq 0.$$

   On pose $t_1 = t_0 + 1$.

   (a) Montrer que f est monotone sur l'intervalle $[t_1, +\infty[$.

   La fonction f étant continue, l'hypothèse et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que la fonction f est de signe constant (soit partout > 0, soit partout < 0) sur $[t_0, +\infty[$.

   Premier cas. *Supposons $\forall t \in [t_0, +\infty[\,, f(t) > 0$.*
   Pour tout $t \geqslant t_1$, on a alors $t - 1 \geqslant t_0$, donc

   $$f'(t) = -a\, f(t-1) < 0$$

   notamment parce que $a > 0$.
   On a donc montré $\forall t \in [t_1, +\infty[\,, f'(t) < 0$, ce qui montre que f est (strictement) décroissante sur l'intervalle $[t_1, +\infty[$.

Deuxième cas. *En appliquant ce qui précède à* $-f \in \mathscr{S}_a$*, on montre que si* f *est strictement négative sur* $[t_0, +\infty[$*, alors elle est (strictement) croissante sur l'intervalle* $[t_1, +\infty[$.

In fine, *la fonction* f *est bien (strictement) monotone sur l'intervalle* $[t_1, +\infty[$.

(b) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

La rédaction de la question précédente montre que deux cas peuvent advenir :

- *soit* f *est positive (donc minorée) et décroissante sur* $[t_1, +\infty[$ *;*
- *soit* f *est négative (donc majorée) et décroissante sur* $[t_1, +\infty[$.

Dans les deux cas, le théorème de la limite monotone assure que f *admet une limite finie en* $+\infty$.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $c_t \in [t-1, t]$ tel que

$$f(t+1) - f(t) = -a\, f(c_t).$$

La fonction f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$*. Elle est notamment continue en tout point de* $[t, t+1]$ *et dérivable en tout point de* $]t, t+1[$.
D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $\widetilde{c}_t \in]t, t+1[$ *tel que*

$$f'(\widetilde{c}_t) = \frac{f(t+1) - f(t)}{(t+1) - t} = f(t+1) - f(t).$$

Comme $f \in \mathscr{S}_a$*, on en déduit*

$$f(t+1) - f(t) = f'(\widetilde{c}_t) = -a\, f(\widetilde{c}_t - 1),$$

ce qui conclut, en posant $c_t = \widetilde{c}_t - 1 \in]t-1, t[\subseteq [t-1, t]$.

(d) Montrer que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Notons $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$*, dont l'existence est garantie par la question 3b.*
Pour tout $t \in \mathbb{R}$*, on a* $t - 1 \leqslant c_t$.
D'après le théorème de minoration, on en déduit que $c_t \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$*, et donc que* $f(c_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell$ *par composition. Ainsi,*

$$-a\, f(c_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -a\, \ell.$$

Par ailleurs, on a $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell$*, donc* $f(t+1) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell$ *par composition, puis*

$$f(t+1) - f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

D'après la question précédente, les deux fonctions dont on vient de calculer les limites en $+\infty$ *sont égales, donc on en déduit* $0 = -a\, \ell$ *par unicité de la limite puis* $\ell = 0$ *car* $a \neq 0$.
Ainsi, $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Partie II.

Dans toute cette partie, on fixe $a > e^{-1}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a\, e^{u_n}.$$

4. Dresser le tableau de variations (avec les limites) de la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & x\,e^{-x}. \end{cases}$$

La fonction φ est dérivable, de dérivée $x \mapsto (1-x)e^{-x}$, donc on obtient rapidement le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'			$+$		0	$-$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		e^{-1}	$\searrow$	0

- *Comme* $x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ *et* $e^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, *on obtient directement* $\varphi(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.
- *On a* $x\,e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *par croissance comparée.*

5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a\,e^{u_n}}{u_n} = \frac{a}{u_n\,e^{-u_n}} = \frac{a}{\varphi(u_n)}.$$

Le tableau de variations montre que la fonction φ est majorée par $e^{-1} < a$. Ici, on en déduit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{\varphi(u_n)} > 1$, *et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît (strictement).*

(b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

D'après le théorème de la limite monotone, on sait déjà que la suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou diverge vers $+\infty$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. On a alors

- *par extraction :* $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$;
- *par opérations :* $u_{n+1} = a\,e^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\,e^{\ell}$.

Par unicité de la limite, on en déduit $\ell = a\,e^{\ell}$, c'est-à-dire $\ell\,e^{-\ell} = a$, c'est-à-dire $\varphi(\ell) = a$, ce qui est à nouveau exclu par le tableau de variations et le fait que $a > e^{-1}$.
Cela fournit la contradiction souhaitée.
On en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Partie III.

Dans toute cette partie, on fixe $a > 0$.

Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on note

$$f_b : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-bt}. \end{cases}$$

6. Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer par double implication l'équivalence

$$f_b \in \mathscr{S}_a \Leftrightarrow b\,e^{-b} = a.$$

Sens direct. *Supposons* $f_b \in \mathscr{S}_a$.

La fonction f_b *est dérivable, de dérivée* $t \mapsto -b\,e^{-bt}$. *Ainsi, le fait que* $f_b \in \mathscr{S}_a$ *donne*

$$\forall t \in \mathbb{R}, -b\,e^{-bt} + a\,e^{b(t-1)} = 0.$$

En appliquant cette $\forall$*-assertion (par exemple) en* 1, *on obtient* $-b\,e^{-b} + a = 0$, *ce qui donne* $a = b\,e^{-b} = \varphi(b)$.

Sens réciproque. *Supposons* $a = \varphi(b) = b\,e^{-b}$.

La fonction f_b *est de classe* C^1. *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned} f_b'(t) + a\,f_b(t-1) &= -b\,e^{-bt} + a\,e^{-b(t-1)} \\ &= -b\,e^{-bt} + a\,e^{b-bt} \\ &= (a\,e^{b} - b)e^{-bt} \\ &= (a - b\,e^{-b})\,e^{b}\,e^{-bt} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que f_b *appartient à* $\mathscr{S}_a$ *et conclut.*

7. On suppose $a \in \left]0, e^{-1}\right]$.

Montrer que $\mathscr{S}_a$ contient (au moins) une fonction qui ne s'annule jamais.

D'après la question 4 (et le théorème des valeurs intermédiaires généralisé, applicable ici car f *est – au moins – continue), il existe* $b \in [1, +\infty[$ *tel que* $\varphi(b) = a$.

D'après la question précédente, on en déduit que $f_b \in \mathscr{S}_a$.

L'expression de f_b *rend manifeste que cette fonction ne s'annule pas.*

Partie IV.

Dans toute cette partie, on fixe $a > e^{-1}$.

On suppose avoir trouvé une fonction $f \in \mathscr{S}_a$ et un réel $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \left]-\infty, t_0\right], f(t) > 0.$$

On essaye alors d'aboutir à une contradiction.

8. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty, t_0]$.

Soit $t \in]-\infty, t_0]$.

On a alors

$$\begin{aligned} f'(t) &= -a\, f(t-1) \\ &< 0. && \textit{(car } t-1 \leqslant t \leqslant t_0 \textit{ et } a>0\textit{)} \end{aligned}$$

Cela montre que f' *est (strictement) négative sur l'intervalle* $]-\infty, t_0]$*, donc* f *décroît (strictement) sur cet intervalle.*

9. On pose

$$h : \begin{cases}]-\infty, t_0] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t)\, e^{at}. \end{cases}$$

(a) Montrer que h est décroissante.

La fonction h *est dérivable par opérations.*
Soit $t \in\,]-\infty, t_0]$*. On a*

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)\, e^{at} + a\, f(t)\, e^{at} \\ &= (f'(t) + a\, f(t))\, e^{at}. \end{aligned}$$

Or, par décroissance de f *(et comme* $a>0$*), on a* $f'(t) + a\, f(t) \leqslant f'(t) + a\, f(t-1) = 0$*.*
Ainsi, $h'(t) \leqslant 0$*.*
On a donc montré que h' *était négative sur l'intervalle* $]-\infty, t_0]$*, donc* h *est décroissante.*

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \leqslant t_0, f'(t) + u_n\, f(t) \leqslant 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on note* $P(n)$ *l'assertion* $\forall t \leqslant t_0, f'(t) + u_n\, f(t) \leqslant 0$*.*
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ *par récurrence.*

Initialisation. *Soit* $t \leqslant t_0$*.*
D'après la question précédente (et comme $a>0$*), on a*

$$\begin{aligned} a\, h(t-1) \geqslant a\, h(t) \quad & \textit{donc} \quad a\, f(t-1)\, e^{a(t-1)} \geqslant a\, f(t)\, e^{at} \\ & \textit{donc} \quad -f'(t)\, e^{a(t-1)} \geqslant a\, f(t)\, e^{at} \\ & \textit{donc} \quad -f'(t) \geqslant a\, e^{a}\, f(t) \qquad \textit{(en divisant par } e^{a(t-1)} > 0\textit{)} \\ & \textit{donc} \quad f'(t) + \underbrace{a\, e^{a}}_{=u_1} f(t) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$*. Montrons* $P(n+1)$*.*

- *Exactement comme à la question 9a, la fonction*

$$h_n : \begin{cases}]-\infty, t_0] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t)\, e^{u_n t} \end{cases}$$

est dérivable par opérations, de dérivée

$$t \mapsto \big(f'(t) + u_n f(t)\big)\, e^{u_n t},$$

négative d'après $P(n)$*.*
On en déduit que la fonction h_n *est décroissante.*

- *Déduisons-en* $P(n+1)$*. Soit* $t \in\,]-\infty, t_0]$*.*
Comme h_n *est décroissante et que* $a>0$*, on a*

$$a\, h_n(t-1) \geqslant a\, h_n(t) \qquad \textit{donc} \qquad a\, f(t-1)\, e^{u_n(t-1)} \geqslant a\, f(t)\, e^{u_n t}$$

$$\begin{array}{lll} \textit{donc} & -f'(t)\,e^{u_n(t-1)} \geqslant a\,f(t)\,e^{u_n t} & \\ \textit{donc} & -f'(t) \geqslant a\,e^{u_n}\,f(t) & \textit{(en divisant par } e^{u_n(t-1)} > 0\textit{)} \\ \textit{donc} & f'(t) + \underbrace{a\,e^{u_n}}_{=u_{n+1}}\,f(t) \leqslant 0, & \end{array}$$

ce qui montre $P(n+1)$*, et clôt la récurrence.*

(c) Conclure.

En appliquant la question précédente à un nombre réel particulier (par exemple, t_0*), on obtient*

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'(t_0) + u_n f(t_0) \leqslant 0.$$

Or, d'après la question 5b, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *et, par hypothèse,* $f(t_0) > 0$*. On en déduit que la suite* $(f'(t_0) + u_n f(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *tout en restant* $\leqslant 0$*, ce qui constitue une contradiction.*

Partie V. Bilan.

10. Soit $a > 0$.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) pour tout $f \in \mathscr{S}_a$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est infini ;
   (ii) on a $a > e^{-1}$.

On procède par double implication.

Sens direct, par contraposée. *Supposons* $a \leqslant e^{-1}$.
D'après la question 7, on peut trouver une fonction $f \in \mathscr{S}_a$ *qui ne s'annule jamais.*
L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ *est alors vide, donc fini, ce qui montre la négation de (i).*

Sens réciproque, par contraposée. *Supposons pouvoir trouver* $f \in \mathscr{S}_a$ *tel que l'ensemble*

$$Z = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$$

soit fini.
On peut alors trouver $t_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall z \in Z, t_0 < z$*. En effet,*

- *si Z est non vide, il admet un minimum car il est fini et il suffit de considérer* $t_0 = \min Z - 1$ *;*
- *si Z est vide,* $t_0 = 0$ *convient, par exemple.*

La fonction f *est alors continue et ne s'annule pas sur l'intervalle* $]-\infty, f]$*, donc elle y est de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires.*

- *Si* $\forall t \in \left]-\infty, t_0\right], f(t) > 0$*, ce qu'on a fait dans la partie IV montre qu'il est impossible que* $a > e^{-1}$.
- *Si* $\forall t \in \left]-\infty, t_0\right], f(t) < 0$*, la fonction* $-f$ *vérifie l'inégalité opposée, tout en restant élément de* $\mathscr{S}_a$*, donc on a de même la négation de* $a > e^{-1}$.

Cela conclut.