Septième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Le sujet est très long, notamment pour vous permettre de choisir de faire plus d'algèbre ou plus d'analyse, si tel est votre désir. Veillez tout de même à consacrer au moins une heure à chaque problème, et notamment à ne pas négliger les premières questions.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *vos résultats. Je me réserve le droit de ne pas lire les parties de votre copie qui contreviendront à cette consigne.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*

Problème A. Sous-espaces stables d'un endomorphisme.

Dans tout le problème, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

Étant donné un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E,

- on dit qu'un sous-espace vectoriel F de E *est stable sous* u si $\forall x \in F, u(x) \in F$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$.

La première partie contient des résultats utiles dans la suite. Les parties suivantes sont indépendantes les unes des autres.

Partie I. Généralités.

Dans cette partie, on fixe un endomorphisme u d'un espace vectoriel E.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables sous u.
   (a) Montrer que $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables sous u.
   (b) $F \cup G$ est-il en général un sous-espace vectoriel de E stable sous u ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que tout sous-espace vectoriel de $E_\lambda(u)$ est stable sous u.
3. Soit E un espace vectoriel, possédant trois sous-espaces vectoriels F, G_1 et G_2.
   On suppose $G_1 \subseteq G_2$ et $\begin{cases} F + G_1 = E \\ F \cap G_2 = \{0_E\}. \end{cases}$
   Montrer $G_1 = G_2$ et $E = F \oplus G$ (où l'on a noté $G = G_1 = G_2$).

Partie II. Un exemple concret.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ X \mapsto AX \end{cases}$ l'endomorphisme canoniquement associé.

4. (a) Calculer A^2.
   (b) En déduire $u^2 = 5u + \beta\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, où $\beta \in \mathbb{R}$ est un nombre que l'on déterminera.
   (c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, on a $E_\lambda(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
5. (a) Déterminer un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_3(u) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et dont la première coordonnée vaut 1.
   (b) On pose $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(v_2, v_3) \subseteq E_2(u)$.
   (c) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   *(**Indication.** On pourra par exemple se ramener à un système de Cramer.)*
   (d) En déduire $\mathbb{R}^3 = E_3(u) \oplus E_2(u)$.
6. Montrer que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables sous u sont les sous-espaces vectoriels de la forme $F \oplus G$, où F est un sous-espace vectoriel de $E_3(u)$ et G est un sous-espace vectoriel de $E_2(u)$.

Partie III. Opérateur d'Abel.

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 1$, et on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit

$$u : \begin{cases} E \to & E \\ P \mapsto P'(X+1). \end{cases}$$

7. Montrer que u est un endomorphisme bien défini de E.

Dans la suite de cette partie, on définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ par

$$A_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour } k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

8. (a) Montrer que $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Étant donné $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\mathrm{Vect}(A_0, A_1, \dots, A_k)$.
   (c) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $u(A_k)$.
9. (a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg u(P) = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } \deg P \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si} \deg P \leqslant 0. \end{cases}$
   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   La question précédente entraîne que u induit une application $u_k : \mathbb{R}_k[X] \to \mathbb{R}_{k-1}[X]$, dont on admet qu'elle est linéaire. Montrer que u_k est surjective.
10. Montrer que les sous-espaces vectoriels stables sous u sont $\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et les $\mathbb{R}_k[X]$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie IV. Opérateur d'Euler.

Là encore, on fixe un entier $n \geqslant 1$, et on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit ici

$$u : \begin{cases} E \to & E \\ P \mapsto X\,P'(X), \end{cases}$$

dont on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un endomorphisme de E.

Par ailleurs, étant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit son *support*

$$S(P) = \left\{ i \in [\![0, n]\!] \,\middle|\, \mathrm{coeff}_i(P) \neq 0 \right\} \subseteq [\![0, n]\!].$$

11. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, calculer $u(X^i)$.

Pour toute partie $I \subseteq [\![0, n]\!]$, on définit

$$F_I = \left\{ P \in E \,\middle|\, S(P) \subseteq I \right\}.$$

12. Soit $I \subseteq [\![0, n]\!]$.
    (a) Montrer que F_I est un sous-espace vectoriel de E, et en donner (sans justification) une base.
    (b) Montrer que F_I est un sous-espace vectoriel stable sous u.
    (c) Combien y a-t-il de sous-espaces vectoriels de ce type ?
13. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $i, j \in [\![0, n]\!]$ deux indices différents.
    Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{Vect}\big(P, u(P)\big)$ tel que $\mathrm{coeff}_i(Q) = \mathrm{coeff}_i(P)$ et $\mathrm{coeff}_j(Q) = 0$.
14. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables sous u.

Problème B. Une équation différentielle avec retard.

Dans tout le problème, étant donné un nombre réel $a > 0$, on définit l'ensemble

$$\mathscr{S}_a = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) + a\, f(t-1) = 0 \right\}.$$

Partie I.

Dans toute cette partie, on fixe $a > 0$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_a$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{S}_a \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$.
3. Soit $f \in \mathscr{S}_a$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\,, f(t) \neq 0.$$

   On pose $t_1 = t_0 + 1$.
   (a) Montrer que f est monotone sur l'intervalle $[t_1, +\infty[$.
   (b) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.
   (c) Soit $t \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe $c_t \in [t-1, t]$ tel que

$$f(t+1) - f(t) = -a\, f(c_t).$$

   (d) Montrer que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Partie II.

Dans toute cette partie, on fixe $a > e^{-1}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a\, e^{u_n}.$$

4. Dresser le tableau de variations (avec les limites) de la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\, e^{-x}. \end{cases}$$

5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Partie III.

Dans toute cette partie, on fixe $a > 0$.

Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on note

$$f_b : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-bt}. \end{cases}$$

6. Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer par double implication l'équivalence

$$f_b \in \mathscr{S}_a \Leftrightarrow b\,e^{-b} = a.$$

7. On suppose $a \in \left]0, e^{-1}\right]$.
   Montrer que $\mathscr{S}_a$ contient (au moins) une fonction qui ne s'annule jamais.

Partie IV.

Dans toute cette partie, on fixe $a > e^{-1}$.

On suppose avoir trouvé une fonction $f \in \mathscr{S}_a$ et un réel $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \left]-\infty, t_0\right], f(t) > 0.$$

On essaye alors d'aboutir à une contradiction.

8. Montrer que f est décroissante sur $\left]-\infty, t_0\right]$.
9. On pose

$$h : \begin{cases} \left]-\infty, t_0\right] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t)\,e^{at}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que h est décroissante.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \leqslant t_0, f'(t) + u_n\, f(t) \leqslant 0$.
   (On rappelle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie à la partie II.)
   (c) Conclure.

Partie V. Bilan.

10. Soit $a > 0$.
    Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
    (i) pour tout $f \in \mathscr{S}_a$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est infini ;
    (ii) on a $a > e^{-1}$.