Huitième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ ou de souligner vos résultats. Je me réserve le droit de ne pas lire les parties de votre copie qui contreviendront à cette consigne.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*

Exercice 1. Quelques intégrales.

Les trois questions sont indépendantes.

1. Calculer $\int_1^4 e^{-\sqrt{x}}\,dx$.
2. Calculer $\int_0^{\pi} \sin(2t)\,e^{\cos(t)}\,dt$.
3. On définit par récurrence la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$d_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}.$$

   (a) Calculer d_0, d_1, d_2, d_3 et d_4.

   (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n\,e^t\,dt = (-1)^n\,[d_n e - n!]$$

   (c) En déduire que $d_n = \frac{n!}{e} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Problème. Théorème de Hartwig, Putcha et Wu (1990).

Dans tout le problème, le corps $\mathbb{K}$ des scalaires est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La lettre E désignera toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On notera systématiquement n la dimension de E, que l'on supposera non nulle.

Le but du problème est de caractériser les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ qui peuvent s'écrire comme somme de projecteurs. L'énoncé précis est donné au début de la troisième partie.

Partie I. Trace d'un endomorphisme.

De nombreux résultats de cette partie sont utiles dans la suite. Même si vous sautez des questions, assurez-vous de prendre note des énoncés.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On se donne deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E et l'on note $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.
   (a) Rappeler sans démonstration le lien entre les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
   (b) En déduire l'égalité $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)$.

La quantité $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)$ ne dépend donc pas du choix de la base $\mathscr{B}$. Dans la suite du problème, on l'appellera *trace* de l'endomorphisme f, et on la notera simplement $\mathrm{tr}(f)$.

Cela définit une application $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$.

2. (a) Montrer que $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.
   (b) Déterminer la dimension de son noyau.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Calculer la trace de l'homothétie $\lambda\, \mathrm{id}_E$.
4. Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_3[X] \\ P \mapsto (1+3X)P - X^2P' \end{cases}$$

   est un endomorphisme bien défini, et déterminer sa trace.
5. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
   (a) Construire une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E et un entier $r \in [\![0, n]\!]$ tels que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], p(u_j) = \begin{cases} u_j & \text{si } j \leqslant r \\ 0_E & \text{si } j > r. \end{cases}$$

   (b) En déduire $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
6. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
   (a) Montrer $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ si et seulement si $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(f)$.
   (b) On suppose $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et l'on note $r = \mathrm{rg}(f)$.
   Construire une famille $(u_1, \dots, u_r)$ de vecteurs de E telle que
   - $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r) \oplus \ker(f)$;
   - la famille $\big(f(u_1), \dots, f(u_r)\big)$ soit une famille libre de $\ker(f)$.

   (c) En déduire que si $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\mathrm{tr}(f) = 0$.

Partie II. Lemme (faible) de Fillmore.

7. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, g(x)\big)$ est liée.
   Soit $\mathscr{B} = \big(u_1, \dots, u_n\big)$ une base quelconque de E.
   (a) Montrer que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est diagonale.
   (b) En considérant le vecteur $u_1 + \cdots + u_n$, montrer que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est scalaire. Qu'en déduit-on sur g ?
8. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ qui ne soit pas une homothétie. En utilisant judicieusement la question précédente, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que le coefficient $(1, 1)$ de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ soit nul.
9. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ qui ne soit pas une homothétie et $\tau \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que le coefficient $(1, 1)$ de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ vaille τ.

Partie III. Théorème HPW : sens facile et un corollaire.

La fin du problème a pour but de démontrer le théorème suivant.

Théorème HPW.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(C1) Il existe un entier naturel $m \in \mathbb{N}$ et des projecteurs $p_1, \dots, p_m \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = \sum_{k=1}^{m} p_k$.

(C2) La trace $\mathrm{tr}(f)$ est un entier, et $\mathrm{tr}(f) \geqslant \mathrm{rg}(f)$.

10. Soit $g_1, g_2 \in \mathscr{L}(E)$.
    (a) Montrer $\mathrm{rg}(g_1 + g_2) \leqslant \mathrm{rg}(g_1) + \mathrm{rg}(g_2)$.
    (b) Montrer $\mathrm{rg}(g_1 + g_2) = \mathrm{rg}(g_1) + \mathrm{rg}(g_2) \Leftrightarrow \mathrm{im}(g_1 + g_2) = \mathrm{im}(g_1) \oplus \mathrm{im}(g_2)$.
11. Montrer l'implication **(C1)** $\Rightarrow$ **(C2)**.
12. Dans cette question, on admet le théorème HPW. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
    Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un entier naturel $m \in \mathbb{N}$, des projecteurs $p_1, \dots, p_m \in \mathscr{L}(E)$ et des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{\pm 1\}$ tels que $f = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k\, p_k$.

Partie IV. *Rech. proj. pour proj. priv.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ sera dit *privilégié* pour f si le rang de p vaut 1 et que l'on a la décomposition $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(p) \oplus \mathrm{im}(f - p)$.

13. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang 1. On suppose $\mathrm{im}(p) \subseteq \mathrm{im}(f)$ et que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{im}(p)$ et $\mathrm{im}(f-p)$ sont en somme directe.

    Montrer que p est un projecteur privilégié pour f.

14. Dans cette question, on suppose qu'il existe une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E telle que $u_1 \in \mathrm{im}(f)$ et $f(u_1) - u_1 \in \mathrm{Vect}\left(u_2, \dots, u_n\right)$.

    On note $\widetilde{p}$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(u_2, \dots, u_n\right)$, et on va montrer que $p = \widetilde{p} \circ f$ est un projecteur privilégié pour f.

    (a) Montrer que $\mathrm{rg}(p) \leqslant 1$ et calculer $p(u_1)$.

    (b) En déduire $E = \mathrm{Vect}(u_1) \oplus \ker(p)$, puis que p est un projecteur de rang 1.

    (c) Conclure.

    On pourra par exemple écrire $f - p$ *en fonction de* $\widetilde{p}$*, puis utiliser la question 13.*

15. On suppose $f^2 \notin \mathrm{Vect}(f)$.

    (a) Montrer que f induit un endomorphisme φ de $\mathrm{im}(f)$, et que cet endomorphisme n'est pas une homothétie.

    (b) En appliquant judicieusement les questions 9 et 14, montrer que f possède un projecteur privilégié.

Partie V. Théorème HPW : sens difficile.

On va conclure la démonstration du théorème HPW « par récurrence sur le rang de f. » Plus précisément, pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathrm{HPW}(r)$ l'assertion

> « Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = r$, $\mathrm{tr}(f) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(f) \geqslant r$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et des projecteurs $p_1, \dots, p_m \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = \sum_{k=1}^{m} p_k$, »

et on se propose de montrer $\forall r \in [\![0, n]\!], \mathrm{HPW}(r)$ par récurrence finie.

16. Écrire précisément l'initialisation de la récurrence.

17. Soit $r \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathrm{HPW}(r-1)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = r$, $\mathrm{tr}(f) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(f) \geqslant r$.

    (a) On suppose $f^2 \notin \mathrm{Vect}(f)$. Montrer que f est une somme de projecteurs.

    (b) Conclure la démonstration du théorème HPW.