Interrogations de calcul : boss de fin [corrigé]

Exercice 1. Calculs d'intégrales.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}(x)^2}\,dx$.

   On a

$$\begin{aligned}
K &= \int_{\mathrm{sh}(0)}^{\mathrm{sh}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)} \frac{dy}{1+y^2} \qquad \begin{bmatrix} y=\mathrm{sh}(x) \\ dy = \mathrm{ch}(x)\,dx \\ \mathrm{sh}\ \textit{de classe}\ C^1 \end{bmatrix}\\
&= \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\\
&= [\arctan(y)]_{y=0}^1\\
&= \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{car} \quad \mathrm{sh}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) &= \frac{e^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} - e^{-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 1\right)\\
&= \frac{2+2\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)}dt$.

   On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)}dt &= [t\ \tan(t)]_{t=0}^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan(t)\,dt \qquad (t \mapsto t\ \textit{et}\ \tan\ \textit{sont}\ C^1)\\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt\\
&= \frac{\pi}{4} + \left[\ln\left(\cos(t)\right)\right]_{t=0}^{\pi/4}\\
&= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln(1)\\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.
\end{aligned}$$

   (On pouvait aussi effectuer le changement de variables $u = \tan(t)$*.)*

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}\,dx$.

On effectue une intégration par parties en dérivant $x \mapsto x\,e^x$ *(qui est bien de classe* C^1*) et en primitivant* $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$ *(dont la primitive,* $x \mapsto -(1+x)^{-1}$*, est bien de classe* C^1*) :*

$$\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{x\,e^x}{1+x}\right]_{x=0}^1 + \int_0^1 \frac{e^x + x\,e^x}{1+x}\,dx = -\frac{e}{2} + \underbrace{\int_0^1 e^x\,dx}_{=e-1} = \frac{e}{2} - 1.$$

Exercice 2. Nature de séries.

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,\sqrt[n]{n}}$.

   On a $\forall n \geqslant 1,\ \sqrt[n]{n} = \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$*. Par croissances comparées,* $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, donc* $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
   On en déduit que $\dfrac{1}{n\,\sqrt[n]{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$*. Par comparaison de séries à termes positifs, la divergence de la série harmonique entraîne celle de la série étudiée.*

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n} 3^{-\sqrt{n}}$.

   C'est une série « au goût exponentiel », que l'on traite de la manière standard.
   On a $n^2\,3^{-\sqrt{n}} = \exp\left(2\ln(n) - \ln(3)\sqrt{n}\right)$.
   Par croissances comparées, $2\ln(n) - \ln(3)\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(3)\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$*. Par composition de limites, on en déduit* $n^2\,3^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, c'est-à-dire* $3^{-\sqrt{n}} = o\left(n^{-2}\right)$.
   Par comparaison à une série de Riemann, la série de l'énoncé converge donc (absolument).

3. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

   (a) Montrer que la série ne converge pas absolument.

   On a clairement $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.
   Comme la série harmonique diverge, il en va de même de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n}$*, par comparaison de séries à termes positifs. Cela dit exactement que la série de l'énoncé ne converge pas absolument.*

   (b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur un intervalle pertinent, montrer $\dfrac{\ln(2n)}{2n} - \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{4n^2}$.

   Soit $n \geqslant 1$*. La fonction* $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ *est lisse sur* $\mathbb{R}_+^*$. A fortiori*, elle est continue sur le segment* $[2n, 2n+1]$*, et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]2n, 2n+1[$.
   D'après le théorème des accroissements finis, on peut donc trouver un point $c_n \in \,]2n, 2n+1[$ *tel que* $f(2n+1) - f(2n) = \dfrac{f(2n+1) - f(2n)}{(2n+1) - 2n} = f'(c_n)$*. En calculant cette dérivée, cela donne*

$$\frac{\ln(2n)}{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = f(2n) - f(2n+1) = -f'(c_n) = \frac{\ln(c_n) - 1}{c_n^2}.$$

L'appartenance $c_n \in \,]2n, 2n+1[$ *donne* $c_n = 2n + O(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$*, donc on a déjà* $c_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n^2$*.*
Par ailleurs, comme $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$*, ce que l'on peut réécrire* $c_n = \big(1+o(1)\big)2n$*, on a*

$$\ln(c_n) = \ln\big(1+o(1)\big) + \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2) + o(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n),$$

ce qui conclut, par les propriétés multiplicatives des équivalents.

(c) En déduire (sans utiliser le critère des séries alternées) que la série de l'énoncé converge.

Pour tout $N \geqslant 2$*, on note* $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$*.*
Pour tout entier $K \geqslant 1$*, on a* $S_{2K+1} = \displaystyle\sum_{n=2}^{2K+1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\ln(2k)}{k} - \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \right)$*.*
Autrement dit, $\big(S_{2K+1}\big)_{K\geqslant 1}$ *est la suite des sommes partielles de la série* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{\ln(2k)}{k} - \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \right)$*.*
D'après la question précédente, $\dfrac{\ln(2k)}{k} - \dfrac{\ln(2k+1)}{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(k)}{4k^2} = o\left(\dfrac{1}{k^{3/2}}\right)$*, donc la série* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{\ln(2k)}{k} - \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \right)$ *est absolument convergente par comparaison à une série de Riemann.*
Cela démontre l'existence de $\Sigma \in \mathbb{R}$ *tel que* $S_{2K+1} \xrightarrow[K\to+\infty]{} \Sigma$*.*
Comme par ailleurs $\dfrac{\ln(2K+1)}{2K+1} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0$ *par croissances comparées, on a également la convergence* $S_{2K} = S_{2K+1} + \dfrac{\ln(2K+1)}{2K+1} \xrightarrow[K\to+\infty]{} \Sigma$ *par opérations.*
Un théorème du cours sur les suites extraites garantit alors $S_K \xrightarrow[K\to+\infty]{} \Sigma$*, c'est-à-dire que la série de l'énoncé converge.*

Exercice 3. Un problème d'occupation.

Dans tout l'exercice, on fixe deux entiers $r, n \geqslant 2$. On ne cherchera pas à décrire l'espace probabilisé fini (Ω, P) sur lequel les variables aléatoires sont définies.

On considère r variables aléatoires $X_1, \dots, X_r$ indépendantes suivant la loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

(Si l'on veut un *word problem*, on jette successivement et au hasard r boules dans n paniers numérotés. Pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la variable aléatoire X_k est le numéro du panier dans lequel tombe la k-ième boule.)

1. *(Tous dans le même panier.)* Déterminer la probabilité de l'évènement $(X_1 = \cdots = X_r)$.

   On va appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\big((X_r = \ell)\big)_{\ell=1}^{n}$ *défini par la variable aléatoire* X_r*. On a*

$$\begin{aligned}
P(X_1 = \cdots = X_r) &= \sum_{\ell=1}^{n} P\big((X_1 = \cdots = X_r) \cap (X_r = \ell)\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} P(X_1 = \cdots = X_r = \ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} P(X_1 = \ell, \dots, X_r = \ell) && \textit{(conditions équiv., évts égaux)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} P(X_1 = \ell) \cdots P(X_r = \ell) && \textit{(indépendance des } X_k\textit{)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^r \qquad (X_k \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket))$$
$$= \frac{1}{n^{r-1}}.$$

2. *(Record au dernier lancer.)* Pour tout $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, on note $A_k = (X_k \leqslant X_r)$.

   (a) Déterminer la probabilité $p_{r,n}$ de l'évènement $\bigcap_{k=1}^{r-1} A_k$.

   On suit le même plan :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{k=1}^{r-1} A_k\right) &= \sum_{\ell=1}^{n} P\left(\bigcap_{k=1}^{r-1} (X_k \leqslant X_r) \cap (X_r = \ell)\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} P(X_1 \leqslant \ell, \dots, X_{r-1} \leqslant \ell, X_r = \ell) && \textit{(conditions équiv., évts égaux)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} P(X_1 \leqslant \ell) \cdots P(X_{r-1} \leqslant \ell)\, P(X_r = \ell) && \textit{(indépendance des } X_k\textit{)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\ell}{n}\right)^{r-1} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\ell}{n}\right)^{r-1}.
\end{aligned}$$

   (b) On garde r fixé. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_{r,n}$.

   D'après le théorème sur les sommes de Riemann (à droite, mais on ne va pas chipoter),

$$p_{n,r} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\ell}{n}\right)^{r-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 t^{r-1}\, dt = \frac{1}{r}.$$

3. *(Nombre de paniers occupés).* On note $N = \left|\{X_1, \dots, X_r\}\right|$ le cardinal de $\{X_1, \dots, X_r\}$ (qui est un ensemble aléatoire). Formellement, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $N(\omega) = \left|\{X_1(\omega), \dots, X_r(\omega)\}\right|$.

   (a) Pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note O_ℓ l'évènement $\bigcup_{k=1}^{r} (X_k = \ell)$. Calculer sa probabilité.

   Les évènements $(X_k = \ell)$ (pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$) sont définis par des variables aléatoires indépendantes, et ils sont donc indépendants. Pour exploiter cette indépendance, on va passer par les complémentaires.

   On a $\overline{O_\ell} = \bigcap_{k=1}^{r} \overline{(X_k = \ell)}$, donc, par l'indépendance que l'on vient de signaler,

$$P(\overline{O_\ell}) = P\left(\bigcap_{k=1}^{r} \overline{(X_k = \ell)}\right) = \prod_{k=1}^{r} (1 - P(X_k = \ell)) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r.$$

   Ainsi, $P(O_\ell) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$.

(b) Calculer l'espérance $\mu_{r,n}$ de N.

On applique la méthode des indicatrices. Par définition, $N = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{1}_{O_k}$.

Par linéarité de l'espérance, on a donc $E[N] = \sum_{\ell=1}^{n} E[\mathbb{1}_{O_\ell}] = \sum_{\ell=1}^{n} P(O_\ell) = n\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r\right]$.

(c) On garde r fixé. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_{r,n}$.

C'est un petit développement limité. On a $\left(1-\frac{1}{n}\right)^r = 1 - \frac{r}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$*, donc*

$$\mu_{r,n} = n\left[1 - \left(1 - \frac{r}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = n\left[\frac{r}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = r + o(1),$$

c'est-à-dire que $\mu_{r,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$.

Exercice 4. Une équation différentielle à coefficients non constants.

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0 \qquad \text{(É)}$$

sur $\mathbb{R}$. On en cherchera les solutions à valeurs réelles.

1. On suppose dans cette question avoir trouvé une solution f de (É) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose alors $h : x \mapsto \lambda(x)f(x)$.

   Montrer que h est solution de (É) si et seulement si λ' est solution de $y' + 2\frac{f'(x)}{f(x)}y = 0. \quad (*)$

   Remarquons que, puisque f est solution de (É), elle est notamment deux fois dérivable. Ainsi, h est deux fois dérivable par opérations. On a alors la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
h \textit{ solution de (É)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)h''(x) - 2h(x) = 0 \\
&\overset{L}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)\left[\lambda''(x)f(x) + 2\lambda'(x)f'(x) + \lambda(x)f''(x)\right] - 2\lambda(x)f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x)\left[(1+x^2)f''(x) - 2f(x)\right] + (1+x^2)\left[\lambda''(x)f(x) + 2\lambda'(x)f'(x)\right] = 0 \\
&\overset{0}{\Leftrightarrow} \lambda''(x)f(x) + 2\lambda'(x)f'(x) = 0 \\
&\overset{f}{\Leftrightarrow} \lambda''(x) + 2\frac{f'(x)}{f(x)}\lambda'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda' \textit{ solution de } (*).
\end{aligned}$$

   Justifications.

   $\overset{L}{\Leftrightarrow}$ *Formule de Leibniz.*

   $\overset{0}{\Leftrightarrow}$ *Le terme entre crochets est nul parce que f est solution de (É), et on peut « simplifier » le facteur $1+x^2$ parce que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$.*

   $\overset{f}{\Leftrightarrow}$ *On peut simplifier parce que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.*

   Cela démontre l'équivalence demandée.

2. Trouver une solution polynomiale de degré 2 de (É).

   Après un calcul au brouillon, $x \mapsto 1+x^2$ convient, ce que l'on vérifie aisément.

3. Résoudre $y' + \dfrac{4x}{1+x^2}\, y = 0. \quad (\star)$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{4x}{1+x^2}$ *est* $x \mapsto 2\ln(1+x^2)$*, donc l'ensemble des solutions est*

$$\mathscr{S}_\star = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{-2\ln(1+x^2)}\right) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}\right).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Le point-clef est que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ *a pour dérivée* $t \mapsto -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$*. On va donc chercher à faire apparaître cette fraction rationnelle dans le calcul.*
Les fonctions $t \mapsto t$ *et* $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)}$ *étant de classe* C^1*, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt &= -\frac{1}{2}\int_0^x t\,\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\, dt \\ &\overset{IPP}{=} -\frac{1}{2}\left(\left[t\,\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=0}^{x} - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)}\, dt\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \arctan x\right) \\ &= \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

5. Résoudre (É).

La question 2 nous fournit une solution polynomiale à (É), à savoir $f : x \mapsto 1 + x^2$*. Remarquons que cette solution ne s'annule pas.*
D'après la question 1, si $\lambda \in D^2(\mathbb{R})$*, on a donc que* $x \mapsto (1+x^2)\lambda(x)$ *est solution de (É) si et seulement si* λ' *est solution de* $(\star)$ *(car* $\dfrac{f'}{f} : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$*, donc, dans ce cas, l'équation* $(*)$ *est simplement* $(\star)$*).*
Or, on a résolu $(\star)$ *à la question 3, on déduit de tout ce qui précède que* $x \mapsto (1+x^2)\lambda(x)$ *est solution de (É) si et seulement si* $\lambda' \in \mathscr{S}_\star$*.*
Pour conclure, on raisonne par analyse et synthèse.

Analyse. *Soit* $h \in D^2(\mathbb{R})$ *une solution de (É).*

On pose $\lambda : x \mapsto \dfrac{h(x)}{1+x^2}$ *(en utilisant* $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$*), de telle sorte que* $h : x \mapsto (1+x^2)\lambda(x)$*.*
Puisque h *est solution de (É), on en déduit que* $\lambda' \in \mathscr{S}_*$*.*
On peut donc trouver $\mu \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lambda' : x \mapsto \dfrac{\mu}{(1+x^2)^2}$*.*
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x^2)^2} &= \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Puisque, d'après la question 4 et le théorème fondamental, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2}$ *est une primitive de* $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$*, on en déduit que* $x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan(x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2}$ *est une primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$*.*

Puisque deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante, on en déduit pouvoir trouver $\kappa \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\lambda : x \mapsto \frac{\mu}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + \kappa = \nu\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + \kappa,$$

où l'on a posé $\nu = \dfrac{\mu}{2}$*, par commodité d'écriture.*
On en déduit que h *a pour expression*

$$h : x \mapsto \nu\Big((1+x^2)\arctan x + x\Big) + \kappa(1+x^2).$$

Synthèse. *Réciproquement, on vérifie par le calcul que* $x \mapsto (1+x^2)\arctan x + x$ *est solution de* (É)*. Comme on sait depuis la question 2 qu'il en va de même de* $x \mapsto 1+x^2$*, on en déduit (par principe de superposition) qu'il en va de même de la combinaison linéaire*

$$x \mapsto \nu\Big((1+x^2)\arctan x + x\Big) + \kappa(1+x^2),$$

quels que soient $\nu, \kappa \in \mathbb{R}$.

In fine, *l'ensemble des solutions de* (É) *est*

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \left\{x \mapsto \nu\Big((1+x^2)\arctan x + x\Big) + \kappa(1+x^2) \;\middle|\; \nu, \kappa \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \operatorname{Vect}\Big(x \mapsto (1+x^2)\arctan x + x, x \mapsto 1+x^2\Big).\end{aligned}$$