Interrogations de calcul : boss de fin

Durée : *2 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Le sujet est long, pour vous permettre de faire des choix. Les deux premiers exercices auront un poids important dans le barème, et ne doivent pas être négligés.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats. Je me réserve le droit de ne pas lire les parties de votre copie qui contreviendront à cette consigne.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*

Exercice 1. Calculs d'intégrales.

Les questions sont indépendantes.

Dans tous les cas, vous devriez trouver des expressions raisonnablement simples. Disons pour fixer les idées que $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ *est possible, mais* $\arcsin\left(\operatorname{th}\left(\pi-\sqrt{2}\right)\right)$ *ne l'est pas.*

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}(x)^2}\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)}\,dt$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}\,dx$.

Exercice 2. Nature de séries.

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,\sqrt[n]{n}}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n} 3^{-\sqrt{n}}$.
3. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.
   (a) Montrer que la série ne converge pas absolument.
   (b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur un intervalle pertinent, montrer $\dfrac{\ln(2n)}{2n}-\dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{4n^2}$.
   (c) En déduire (sans utiliser le critère des séries alternées) que la série de l'énoncé converge.

Exercice 3. Un problème d'occupation.

Dans tout l'exercice, on fixe deux entiers $r, n \geqslant 2$. On ne cherchera pas à décrire l'espace probabilisé fini (Ω, P) sur lequel les variables aléatoires sont définies.

On considère r variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$ indépendantes suivant la loi uniforme $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

(Si l'on veut un *word problem*, on jette successivement et au hasard r boules dans n paniers numérotés. Pour $k \in [\![1, r]\!]$, la variable aléatoire X_k est le numéro du panier dans lequel tombe la k-ième boule.)

1. *(Tous dans le même panier.)* Déterminer la probabilité de l'évènement $(X_1 = \cdots = X_r)$.
2. *(Record au dernier lancer.)* Pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, on note $A_k = (X_k \leqslant X_r)$.

   (a) Déterminer la probabilité $p_{r,n}$ de l'évènement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{r-1} A_k$.

   (b) On garde r fixé. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_{r,n}$.

3. *(Nombre de paniers occupés).* On note $N = \left|\{X_1, \ldots, X_r\}\right|$ le cardinal de $\{X_1, \ldots, X_r\}$ (qui est un ensemble aléatoire). Formellement, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $N(\omega) = \left|\{X_1(\omega), \ldots, X_r(\omega)\}\right|$.

   (a) Pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, on note O_ℓ l'évènement $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{r}(X_k = \ell)$. Calculer sa probabilité.

   (b) Calculer l'espérance $\mu_{r,n}$ de N.

   (c) On garde r fixé. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mu_{r,n}$.

Exercice 4. Une équation différentielle à coefficients non constants.

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$(1 + x^2)y'' - 2y = 0 \qquad \text{(É)}$$

sur $\mathbb{R}$. On en cherchera les solutions à valeurs réelles.

1. On suppose dans cette question avoir trouvé une solution f de (É) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose alors $h : x \mapsto \lambda(x)f(x)$.

   Montrer que h est solution de (É) si et seulement si λ' est solution de $y' + 2\dfrac{f'(x)}{f(x)}y = 0$. $\quad(*)$
2. Trouver une solution polynomiale de degré 2 de (É).
3. Résoudre $y' + \dfrac{4x}{1+x^2}\,y = 0$. $\quad(\star)$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
5. Résoudre (É).