Logique

Exercice 4.

Dans la première question, on pourra penser à utiliser la loi de De Morgan.

Exercice 7.

Écrire la négation des deux assertions.

Exercice 12.

(iv) En italien, « se » veut dire « si » (la conjonction de subordination, comme dans « si le temps est pluvieux, je prends mon parapluie »).

(v) En allemand, « wenn » signifie « si » et « genau dann P, wenn Q » est une des façons de dire « P si et seulement si Q ».

Exercice 13.

3 est un nombre premier.

Exercice 14.

On pourra par exemple procéder par contraposée.

Exercice 15.

Démontrer la contraposée de l'assertion.

Exercice 21.

On pourra procéder par analyse et synthèse.

Dans la phase d'analyse, on cherchera à exploiter le cas particulier de $y = 0$.

Exercice 32.

Voici une reformulation plus directe de l'énoncé.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n. \end{cases}$$

1′. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

2′. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 - 2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.

3′. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ et en déduire qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

Exercice 33.

Il est facile de vérifier la propriété pour les entiers 12, 13, 14 et 15. En quoi est-ce que cela aide ?

Exercice 35.

Montrer qu'en partant d'un dépôt bien choisi, on peut avoir assez d'essence pour atteindre le dépôt suivant.

On peut ensuite envisager une preuve par récurrence sur le nombre de dépôts.

Exercice 39.

Deux manières utiles de manipuler les valeurs absolues :

- quel que soit x, on a l'encadrement $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;
- pour deux nombres $C \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, l'encadrement $-C \leqslant x \leqslant C$ est équivalent à l'inégalité $|x| \leqslant C$.

Exercice 40.

3. Il faut gérer la dépendance en les deux entiers. Pour ce faire, on pourra fixer un entier $n \geqslant 2$ et démontrer $\forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1}\, F_m + F_n F_{m+1}$ par récurrence double.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) La négation de P et non(Q) est, d'après le cours, non(P) ou non(non(Q)), ce qui est encore équivalent à

$$\text{non}(P) \text{ ou } Q.$$

(ii) On a les équivalences

$$\begin{aligned} \text{non}\,[(P \Rightarrow Q) \text{ et } R] \quad & \text{est équivalente à} \quad \text{non}(P \Rightarrow Q) \text{ ou non}(R) \\ & \text{est équivalente à} \quad (P \text{ et non}(Q)) \text{ ou non}(R). \end{aligned}$$

(iii) La négation de $\exists x \in [1, +\infty[\; : a \geqslant b + x$ est $\forall x \in [1, +\infty[, \text{non}(a \geqslant b + x)$, ce que l'on peut réécrire plus simplement

$$\forall x \in [1, +\infty[\,, a < b + x.$$

On pourrait d'ailleurs vérifier que l'assertion de départ est équivalente à $a \geqslant b+1$ (et donc que sa négation est équivalente à $a < b + 1$), mais ce n'est pas vraiment le propos ici.

(iv) Il faut réfléchir ici, car $a = b = c$ est une assertion un tout petit peu compliquée. En l'analysant, on peut se rendre compte qu'il s'agit d'une abréviation pour l'assertion $a = b$ et $b = c$. Sa négation est donc $a \neq b$ ou $b \neq c$.
D'autres solutions sont possibles, car on peut « traduire » $a = b = c$ de plusieurs façons différentes ($a = b$ et $a = c$, $a = b$ et $b = c$ et $c = a$, etc.)

Autocorrection B.

Plusieurs possibilités, parmi lesquelles :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R} : x = y^2$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x = y^2$.

Autocorrection C.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrons $\exists y \in \mathbb{R} : y < x$.
Candidat : $y = x - 1$.

- On a bien $y \in \mathbb{R}$.
- On a bien $y = x - 1 < x$.

Cela démontre $\exists y \in \mathbb{R} : y < x$.

On a bien montré $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y < x$.

Autocorrection D.

Montrons $\exists x \in I : \forall y \in I, x \leqslant y$.

Candidat : $x = 0$.

- On a bien $x \in I$.
- Montrons $\forall y \in I : x \leqslant y$.
  Soit $y \in I$.

  Par définition de I, on a $0 \leqslant y \leqslant 1$.
  On a donc bien $x \leqslant y$.

  On a donc montré $\forall y \in I, x \leqslant y$.

Cela démontre $\exists x \in I : \forall y \in I, x \leqslant y$.

Autocorrection E.

On calcule les premières valeurs

n	1	2	3	4	5
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$	1	4	9	16	25

et on conjecture

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Montrons-le par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. On a $1 = 1^2$, ce qui montre $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

On a alors

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) & \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) \\ &= n^2 + (2n+1) && \text{d'après } P(n) \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$

ce qui démontre $P(n+1)$, et conclut la récurrence.

Autocorrection F.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion $u_n = 3^n - 2^n$.

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence double.

Initialisation. Vérifions $P(0)$ et $P(1)$.

- On a $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ et $u_0 = 0$, d'où $P(0)$.
- On a $3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1$ et $u_1 = 1$, d'où $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$. Montrons $P(n+2)$.

On a les égalités

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n && \text{par définition} \\
&= 5 \times \left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) - 6 \times (3^n - 2^n) && \text{d'après } P(n) \text{ et } P(n+1) \\
&= 15 \times 3^n - 10 \times 2^n - 6 \times 3^n + 6 \times 2^n && \text{car } 3^{n+1} = 3 \times 3^n \text{ et } 2^{n+1} = 2 \times 2^n \\
&= 9 \times 3^n - 4 \times 2^n \\
&= 3^{n+2} - 2^{n+2},
\end{aligned}$$

ce qui démontre $P(n+2)$ et clôt la récurrence.